My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Suite de Fibonacci

Nombre d'or et applications

Leonardo Fibonacci (1175-1250)

Mathématicien italien surnommé aussi « Léonard de Pise » ou « Leonardo Bigollo » (« voyageur » en italien). Son éducation s'est faite en grande partie en Algérie, où son père était le représentant des marchands de la république de Pise. Ayant voyagé en Égypte, en Syrie pour le compte de son père, Fibonacci en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique. Il prouva que toute fraction a/b pouvait se noter comme une somme de fractions distinctes dont le numérateur est 1, soit, pouvait être représentée par une fraction égyptienne.

Blaque du jour

- Quel est le comble pour un Cosinus ? Attraper une sinusite !!
- Un jour un cosinus va dans une fête où il n'y a que des sinus. Il reste tout seul dans son coin. Une sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste dans sa solitude. Le cosinus répond : "Ben, je suis le seul cosinus dans une fête de sinus !" Et la sinus de répondre : "Eh bien, intègre-toi !"
- Un Cosinus est dans une fête où il n'y a que des Exponentielles Négatives. Le Cosinus s'éclate comme une fou sans aucun signe de fatigue, alors que les Exponentielles Negatives dorment les unes les autres avec le temps. L'une d'elle l'interroge sur son comportement, Cosinus répond : "Désolé, mais je ne connais pas mes limites !"

.

Exercice 1

- **Olympiades** : On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Les premiers termes de la suite de Fibonacci valent : 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,... Montrer que la suite de Fibonacci contient un multiple de 1000.

Exercice 2

On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

❶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant 0$.

❷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n-1} \leqslant F_n \leqslant \varphi^n$, où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

❸ Soit $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (conjugué du nombre d'or) 2ème solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Soit λ et μ les solutions réelles du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = & 1 \\ \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} & = & 1 \end{cases}$$

Montrer que $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❹ En déduire $F_n = \dfrac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

❺ On appellera domino un rectangle de taille 2x1. Combien y a-t-il de manières de placer n dominos sur un échiquier de taille 2xn ?

❻ Quel est le nombre $P(n)$ de manières de disposer n pièces de monnaie, par rangées connexes, de telle manière que chaque pièce touche deux pièces de la rangée inférieure ?

❼ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n.$$

❽ On se donne des carrés de taille $F_n \times F_n$. Arranger successivement les carrés de manière à former, à chaque étape, un rectangle.

❾ **Arbre de Farey** : Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

- ✔ Montrer que
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$
.
- ✔ En déduire que r_{n+1} est compris entre r_n et r_{n-1}, où $r_n = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.
- ✔ En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} r_n$.

❿ **Fractions continues** : Montrer que $r_{n+1} = \dfrac{1}{1+r_n}$. En déduire que

$$r_n = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1}}}.$$

FIN