My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Logique Mathématique

Socrate -470 AvJC, AvJC -399

Philosophe grec considéré comme l'un des inventeurs de la philosophie morale et politique. Socrate n'a laissé aucun écrit, mais sa pensée et sa réputation se sont transmises par des témoignages indirects de ses disciples notamment Platon et Xénophon. Sa condamnation à mort a contribué à faire de lui une icône.

Une question philosophique fût posée jadis par les grecques : Y a t il identité entre l'être et le discours. Y'en a qui pensent que l'être a la primauté et c'est lui qui assure que le discours peut être vrai. Les sophistes opèrent un renversement : c'est le discours qui a la primauté et n'importe quel discours peut donner une existence à n'importe quel être.

Socrate accorde aux sophistes qu'il existe une multitude d'êtres, qui peuvent se montrer illusoires et trompeurs, en relation avec le discours, mais que ces êtres existent aussi en dehors du discours, préservant ainsi la possibilité d'un discours vrai, qui ne varie pas en fonction de la subjectivité de chacun.

Socrate est ainsi à l'origine en philosophie de la notion de concept, ouvrant par là le chemin aux idées platoniciennes qui sont considérées comme les prémices de la logique mathématique moderne.

Blaque du jour

- **P ou $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{V}$** : Deux mathématiciens spécialistes de la logique se rencontrent et discutent :
  – Salut vieux ! j'ai de bonnes nouvelles ! Ma femme a récemment mis au monde notre premier enfant.
  – Ah ! Félicitations ! C'est un garçon ou une fille ?
  – Oui, c'est exact.
- **Femme=Problème** : Pour avoir une femme, il faut de l'argent et du temps. Donc Femme = Argent x Temps. Or, le temps c'est de l'argent, donc Femme = Argent^2. Mais l'argent c'est la racine de tous les problèmes. Donc **Femme** = $\sqrt{\text{Problèmes}}^2$ = Problèmes.
- **Le mouton noir** : Un mathématicien, un biologiste et un physicien voyagent ensemble en Écosse dans un train. Soudain, ils voient à travers la fenêtre un mouton noir.
  Le biologiste dit : « Ah ! En Écosse les moutons sont noirs. »
  Le physicien réplique : « Hum ! Attention ! On n'a fait qu'une observation et tout ce qu'on peut dire c'est qu'il y a un mouton noir, hein ! »
  Le mathématicien les regarde avec un air hautain et dit : « En Écosse, il existe au moins un mouton dont, au moins, un côté est noir. »

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Feuille d'exercices
ECT 1

Exercice 1

Soient P , Q et R trois assertions.

1. Montrer que si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors, $(P \text{ et } R) \Rightarrow Q$ est vraie.
2. Montrer que si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors, $P \Rightarrow (Q \text{ et } R)$ est vraie.

Exercice 2

Remplir les cases de tableau par Vrai ou par Faux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\Rightarrow$	$x \leqslant n$	$x < n$	$E(x) \leqslant n$	$E(x) < n$	$E(x) = n$
$x \leqslant n$					
$x < n$					
$E(x) \leqslant n$					
$E(x) < n$					
$E(x) = n$					

Exercice 3

les assertions suivantes sont elles équivalentes ? si oui compléter le vide par le symbole $\Leftrightarrow$. Conclure.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 \geqslant 0 \text{ et } |x| = \pm x) \cdots\cdots (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \pm x)$;
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 0 \text{ et } x^2 = x^3) \cdots\cdots (\exists x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^3)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ est pair ou } n \text{ est impair}) \cdots\cdots (\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}) \text{ou} (\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est impair})$;
4. $\exists r \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant 2 \text{ et } r \geqslant 1) \cdots\cdots (\exists r \in \mathbb{Q},\ r \leqslant 2) \text{ et } (\exists r \in \mathbb{Q},\ r \geqslant 1)$.

Exercice 4

1. À l'aide d'une étude de fonction montrer que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\forall x \in [0,1],\ \left(x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(1-x \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5

À l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas, montrer que pour tous réels x, y on a :

1. $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$;
2. $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

Exercice 6

On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Fin