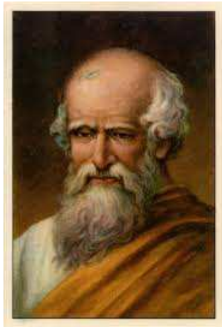
My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Feuille d'exercices
ECT 1

Suites Numériques

Archimède de Syracuse (287 av. J.-C. - 212 av. J.-C)

Grand physicien, mathématicien et ingénieur grecque. Parmi ses domaines d'étude, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour le calcule d'aires à l'aide la somme d'une série infinie et a donné un encadrement de π d'une remarquable précision. Il fût l'un des premiers à utiliser les suites géométriques pour le calcul d'aires ou de volumes. Archimède est mort pendant le siège de Syracuse où il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.



Blaque du jour

Un samedi, un mathématicien, un physicien, et un économiste patientaient sur le parcours de golf en attendant qu'un petit groupe finissent leur parties ; ces derniers étaient si maladroits que leurs balles se perdaient, partaient dans toutes les directions, et ils avaient un mal fou à les retrouver. Dégoûtés, las d'attendre, nos trois amis s'en retournent au clubhouse pour réclamer. Le directeur, leur répond : « mais n'avez-vous pas vu les panneaux ? Aujourd'hui est un jour réservé aux athlètes handicapés... Ces gens devant vous étaient aveugles ! »
Le mathématicien fut submergé de honte et promit au directeur de donner un peu de son temps pour accompagner ces personnes sur le cours ; le physicien, plein de remords, promit de donner 5 000 $ pour cette bonne cause. L'économiste fit alors cette observation : « Ne serait-il pas plus efficient de faire jouer ces gens la nuit ? »

1 Calcul algébrique

Exercice 1

- Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = \sqrt{x} + 2$$
$$(\ln x)^2 - 5\ln x = 12 \qquad e^x + e^{-x} = 2$$
$$\ln(x+3) + \ln(x-2) = 2\ln 2 \qquad x + \frac{1}{x} = 2$$

Exercice 2

- Résoudre les inéquations suivantes :

$$x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \qquad \frac{2x-3}{x^2-4} < 1$$
$$\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \qquad 3 \times 2^{3x-4} \geqslant 7^8$$

Institut des Classes Préparatoires

Exercice 3

- Soient x, y, z trois réels vérifiant $x \in [1;4]$, $2 \leqslant y \leqslant 5$ et $|z| < 3$. Donner un encadrement le plus précis possible des expressions suivantes :

$$2x - 3y + 1 \qquad x(y-3)$$

$$\frac{z}{2} \qquad \frac{3x}{y+1}$$

$$\frac{1}{z-2} \qquad x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{x(z-4)}{y-1} \qquad \sqrt{xy} - 3e^{2-z}$$

2 Suites numériques particulières

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire en fonction de n, l'expression de v_n puis de u_n.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite numérique.

1. Préciser la raison de (u_n) sachant qu'elle est arithmétique et que $u_2 = 3, u_9 = -6$;
2. Préciser la raison de (u_n) sachant qu'elle est géométrique et que $u_5 = 9, u_{12} = -80$;
3. Préciser l'équation caractéristique de (u_n) sachant qu'elle est récurrente linéaire d'ordre 2 et que $u_n = 3 \times 2^n + 2 \times 3^n$.

Exercice 6

- Reconnaître dans chaque cas la nature de la suite (u_n), donner son expression générale, puis simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$u_0 = 2, u_{n+1} = u_n - 5 \qquad u_0 = -5, u_{n+1} = -6 \times u_n$$

$$u_0 = -3, u_{n+1} = -4 \times u_n + \frac{1}{2} \qquad u_0 = \frac{17}{3}, u_{n+1} = -\frac{2}{5} \times u_n - \frac{7}{11}$$

$$u_0 = -1, u_1 = 2,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \qquad u_0 = 0, u_1 = 1,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Exercice 7

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1, v_0 = 2$ et définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n),\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

❶ Reconnaître la nature des deux nouvelles suites w_n et z_n définies par $w_n = u_n + v_n$ et $z_n = u_n - v_n$.

❶ Calculer l'expression de w_n et z_n en fonction de n.

❶ En déduire celle de u_n et de v_n.

3 Monotonie, Majoration, Minoration, Convergence

Exercice 8

☛ Dans chaque cas des exercices 4 et 5 ci dessus, préciser la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 9

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

❶ Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❷ On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Déterminer la nature de la suite (v_n).

❸ En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

❹ En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11

☛ Dans chaque cas des exercices 5 et 6 ci dessus, étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 12

Étudier la monotonie des suites u_n et v_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n,\ v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Exercice 13

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad v_0 = 2$$
$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \qquad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 3x+1$ et $y = x$.

❶ En utilisant les deux droites (D_1) et (D_2), placer sur l'axe des abscisses les réels u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.

❷ Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3. Comparer avec le résultat géométrique obtenu dans la question précédente.

❸ Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

❷ En déduire la monotonie de (u_n).

❸ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $u_n^2 \geqslant 2n + 1$.

❹ En déduire la limite de la suite (u_n).

❺ La suite (u_n) peut-elle être majorée ?

Exercice 15

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Que peut on dire de la suite (u_n)

❷ Étudier la monotonie de la suite (u_n).

❸ Démontrer que $0 \leqslant 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{4}(2 - u_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❹ En déduire que $0 \leqslant 2 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❺ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4 Suites adjacentes

Exercice 16

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$

❶ Donner les valeurs de $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$.

❷ Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

❸ Quelle est leur limite commune ?

Exercice 17

Soit a et b deux nombres réels tes que : $0 < a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a, v_0 = b$ et par les relations de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ ,\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

❶ Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n < v_n$.

❷ En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

❸ Montrer qu'on a : $a < u_n < v_n < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❹ En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

❺ Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5 Applications financières

Exercice 18

En 2015, Hamza dépose 35000 dhs à la Banque Populaire à un taux d'intérêts composés de 5% par an. [Chaque année, les intérêts obtenus s'ajoutent au capital et engendrent d'autres intérêts l'année suivante]. Calculer le montant dont il disposera après un an, deux ans et au bout de 8 ans.

Exercice 19

En 2015, Charaf Eddine dépose 35000 dhs à la Société générale à un taux d'intérêts composés de 3% par an. [Chaque année, les intérêts obtenus s'ajoutent au capital et engendrent d'autres intérêts l'année suivante] plus un bonus annuel fixe de 2000 dhs.

❶ Calculer le montant dont il disposera après un an, deux ans et au bout de 8 ans.

❷ AÍ'aide d'un tableau excel, donner les montants dont disposera chacun de Hamza et Charaf Eddine pour les 20 premières années. Conclure quel est le meilleur choix rentable, celui de Hamza ou celui de Charaf Eddine.

❸ Trouver (sans excel) l'année théorique où la somme dont disposera Charaf Eddine sera supérieur à celle dont disposera Hamza.

Exercice 20

Fatima Zahra a acheté une voiture BMW en 2015 pour un montant de 480 000 dhs. La valeur d'un véhicule diminue de 15% par an. [Chaque année, le prix moyen des véhicules de la même année, diminue de 15%].
Calculer la valeur résiduelle de la voiture de Fatima Zahra en 2022.

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Exercice 21

Une dune mesurait 100 mètres de large en 2010. Kamar, membre d'une équipe de scientifique constate que chaque année la largeur de cette dune diminue de 1,5 m sous l'effet de l'érosion (due au vent, aux vagues et à l'homme). On note u_n la largeur de la dune en $(2010+n)$. Ainsi, u_0 représente la largeur de la dune en 2010 et vaut 100.

❶ Que représente u_1, u_2 et u_{15} ? Calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_{15} ?.

❷ La dune joue un rôle important : elle protège les polders des risques d'inondation et intervient dans la gestion de la qualité des eaux. Kamar estime qu'en dessous de 30 m de large, la dune ne peut plus assurer ce rôle en cas de phénomènes exceptionnels (tempête notamment). Elle prévoit de ralentir l'érosion par des plantations d'oyats (plantes) et la mise en place de (barrières) dès que la dune atteindra 45 m de large.
En quelle année, au plus tard, devra-t-elle intervenir ?

Exercice 22

Abdelehamid dirige une compagnie minérale qui exploite un gisement de fer depuis 2014. La première année, la compagnie a extrait 100 000 tonnes de fer. Vu les difficultés d'extraction, l'exploitation du gisement diminue de 1% chaque année. On appelle u_n le nombre de tonnes de fer extraites l'année $2014+n$.

❶ Montrer que $u_1 = 99000$ puis calculer u_2.

❷ Quelle est la nature de la suite (u_n). Justifier votre réponse.

❸ Donner l'expression explicite de u_n en fonction de n.

❹ Calculer le nombre de tonnes de fer extraites en 2021 arrondi à l'unité.

❺ Montrer que la quantité totale de fer extraite entre 2014 et l'année $(2014+n)$ est donnée par la formule : $S_n = (1 - 0,99n + 1) \times 107$

❻ Calculer en millions de tonnes la quantité de fer que cette compagnie pourra extraire si l'exploitation continue indéfiniment dans ces mêmes conditions.

Exercice 23

Diyae dépose 50000 dhs sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, elle dépose 3000 dhs de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.

❶ Justifier pourquoi on a alors : $u_{n+1} = 1,03 \times u_n + 300$ et $u_0 = 5000$

❷ Préciser la nature de la suite (u_n).

❸ Á l'aide d'un tableur (excel par exemple), calculer la somme totale épargnée à la 10ème année.

❹ Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

❺ Exprimer v_n en fonction de n.

❻ En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors par calcul le résultat de la question ❸.

❼ Étudier les variations de (u_n).

❽ Diyae décide de ne jamais fermer ce compte et le laisser ouvert à l'infini pour ses petits-petits-..... enfants. Approximativement combien peut espérer récupérer son petit-petit-... enfant le plus lointain possible.

FIN