Variables Aléatoires Réelles (VAR)

Exercices (Niveau II)

Prépas-ECT 1

My Ismail Mamouni
http://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Variables aléatoires

Exercice 1.

Une boîte contient 31 jetons rouges, 18 jetons bleus, et 1 jeton vert. Un jeu consiste à piocher un jeton dans la boîte.
Pour jouer, il faut payer 2 euros. Ensuite, si on pioche un jeton rouge, on ne gagne rien. Si on pioche un jeton bleu on gagne 1 euro, et si on pioche le jeton vert, on gagne 50 euros.
On appelle G le gain algébrique d'un joueur à la fin d'une partie (le gain est un nombre positif si le joueur gagne de l'argent, négatif s'il en perd).

1. Déterminer $G(\Omega)$, et la loi de G.

2. Calculer $\mathbf{P}(G \leqslant 0)$. Que représente ce nombre ?

3. Mêmes questions avec $\mathbf{P}_{[G\leqslant 0]}(G = -2)$.

valeurs de G	...
probabilités	

Exercice 2.

Une boîte contient 6 boules indiscernables au toucher. Il y a 3 boules rouges, 2 boules vertes, et 1 boule blanche. On pioche au hasard successivement et sans remise deux boules dans la boîte.

1. Construire l'arbre représentant cette expérience.

2. Une boule rouge rapporte 1 euro, une boule verte 5 euros, et une boule blanche 10 euros. On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le gain issu des deux boules tirées.

(a) Déterminer la loi de Y.

(b) Tracer le diagramme en bâtons correspondant à cette loi.

y_k	...
$\mathbf{P}(Y = y_k)$	

3. Quelle est la probabilité qu'on gagne au moins 12 euros ? et 10 euros ou moins de 10 euros ?
Quelle est la probabilité que l'on gagne moins de 14 euros sachant que l'on a gagné plus de 8 euros ?

Exercice 3.

Cinq boules indiscernables au toucher sont placées dans une urne. Deux sont blanches, et trois sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise des boules de l'urne, et on s'arrête dès que l'on a pioché une boule blanche. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de boules tirées avant de s'arrêter.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X.

2. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête avant d'avoir tiré 3 boules ?

3. Tracer la fonction de répartition de X.

x_k	...
$\mathbf{P}(X = x_k)$	

Exercice 4.

On dispose d'un espace probabilisé avec $\Omega = \{a; b; c; d; e; f\}$. On considère la variable aléatoire T définie sur l'univers Ω par $T(a) = T(e) = 2$; $T(b) = 0$; $T(c) = -3$; $T(d) = -2$ et $T(f) = 1$.

1. Expliciter les issues composant chacun des événements suivants :
$[T = 2]$; $[T = -3]$; $[T = -1]$; $[T \leqslant 0]$; $[T \geqslant 3]$; $[T < 1] \cup [T \geqslant 2]$.

2. En supposant que la probabilité $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω, déterminer la loi de probabilité de T.

t_k	...
$\mathbf{P}(T = t_k)$	

Exercice 5.

Calculer les espérances des variables aléatoires G et Y étudiées dans les exercices précédents, puis les espérances et variances des variables aléatoires X et T.

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{3} \text{ si } -1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 2 \leqslant x < 4 \\ \frac{5}{8} \text{ si } 4 \leqslant x < 8 \\ 1 \text{ si } 6 \leqslant x \end{cases}$$

1. Tracer cette fonction, et déterminer la loi de probabilités de X.

2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7.

Un dé cubique est équilibré, mais ses faces sont les suivantes : -2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le dé après un lancer.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance

2. Tracer le diagramme en bâtons de sa loi, et sa fonction de répartition.

Exercice 8.

Une boîte contient 10 jetons, identiques au toucher. Il y en a 5 rouges, 2 jaunes et 3 verts.
On pioche un jeton dans la boîte, on note sa couleur, puis on le remet dans la boîte et on en tire un deuxième.

1. Quelle est la probabilité que les deux jetons tirés soient de la même couleur.

2. Un casino propose le jeu suivant à partir de cette boîte : si les deux jetons sont de la même couleur, le joueur gagne 3 euros, et si ils sont de couleurs différentes il doit payer 2 euros au casino.
On appelle G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- **(a)** Déterminer la loi de G.
- **(b)** Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 9.

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_k	-2	0	2	5
$\mathbf{P}(X = x_k)$	0,15	0,23	0,45	0,17

1. Si $g(x) = 3x - 4$, déterminer la loi de $Y = g(X)$, puis donner (au moins) deux calculs qui permettent d'obtenir son espérance.

2. Si $h : x \mapsto x^2$, déterminer la loi de $Z = h(X)$, puis donner deux calculs qui permettent d'obtenir son espérance.

Exercice 10.

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7, et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire successivement et sans remise, deux jetons de ce sac.

1.
- **(a)** Déterminer la probabilité que le deuxième jeton soit noir.
- **(b)** Le deuxième jeton était noir, quelle est la probabilité que le premier jeton ait été un jeton blanc ?

2.
- **(a)** On note A l'événement « les deux jetons sont blancs ».
Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{7}{15}$.
- **(b)** On note B l'événement « les deux jetons piochés sont impairs ».
Quelle est la probabilité de B ?
- **(c)** Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3. X est la variable aléatoire du nombre de jetons blancs piochés au cours de ce tirage.
Déterminer la loi de X, puis son espérance.

Exercice 11. Révisions de probabilités conditionnelles.

On dispose de deux pièces, l'une équilibrée, et l'autre truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir Face est $\frac{2}{3}$.

On notera E l'événement « on pioche la pièce équilibrée », et F : « la pièce donne Face ». L'expérience consiste à tirer au hasard l'une des deux pièces, et la lancer.

1. Que vaut $\mathbf{P}_{\overline{E}}(F)$? et $\mathbf{P}(\overline{E} \cap F)$? Présenter les réponses par des phrases liées à la situation.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face ?

3. On a obtenu Face, quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la pièce truquée ?

4. On a obtenu Pile, quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la pièce équilibrée ?

5. Quelle est la probabilité de piocher la pièce équilibrée puis d'obtenir Pile ?

6. Les événements F et E sont-ils indépendants ?

Exercice 12. Révisions sur les événements, l'équiprobabilité.

Une boîte, appelée A, contient 5 jetons numérotés de -2 à 2.

Une boîte, B, contient deux jetons, numérotés 1 et 2 ?

On pioche dans chaque boîte un jeton au hasard. On définit les événements suivants :

- U : « la somme des deux jetons est strictement positive » ;
- V : « la somme des deux jetons est paire » ;
- W : « la somme des deux jetons est nulle » ;
- X : « la somme des deux jetons fait -2 ».

1. Déterminer un univers pour cette expérience et son cardinal.

2. Déterminer la probabilité que les deux jetons piochés soient des 2.

3. Parmi les événements U, V, W, X, en trouver deux qui soient incompatibles, et un qui soit impossible.

4. Calculer les probabilités des événements V, W et X.

5. En utilisant certains des événements U, V, W, X, et/ou d'autres que l'on prendra soin de préciser, déterminer un système complet formé de trois événements.