My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Feuille d'exercices
ECT 1

Probabilités Conditionnelles : Classiques des Concours

Exercice 1

Une personne se déplace chaque jour, soit en vélo, soit en métro, avec les règles suivantes : si elle a pris son vélo un jour, elle prend le métro le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Mais si elle a pris le métro, alors elle ne le reprend le lendemain qu'avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
On note M_n l'événement « elle prend le métro le jour n », et $p_n = \mathbf{P}(M_n)$. On suppose qu'elle prend son vélo le jour 0, de sorte que $p_0 = 0$.

1. Donner p_1, $\mathbf{P}_{M_1}(M_2)$ et $\mathbf{P}_{\overline{M_1}}(M_2)$, et calculer p_2. (*on pourra utiliser un arbre*)

2. **(a)** Donner $\mathbf{P}_{M_n}(M_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{M_n}}(M_{n+1})$.

(b) Exprimer $\mathbf{P}(\overline{M_n})$ en fonction de p_n.

(c) À l'aide de la formule des probabilités totales et des questions précédentes, montrer que que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}p_n$.

3. Reconnaître le type de la suite (p_n) et donner l'expression de p_n en fonction de n.

4. Pour chacun des événements suivants, le décrire en fonction des événements M_k et exprimer leurs probabilités en fonction de termes de la suite (p_n).
A : « la personne prend le métro le jour 6 et le jour 7 »
B : « la personne prend le métro le jour 6 ou le jour 7 »
C : « la personne prend son vélo le jour 5 et le métro le jour 6 »

Exercice 2

Un test pour une maladie rare est supposé fiable dans 95% des cas : la probabilité que le test soit positif quand une personne est malade est égale à 0.95, et la probabilité qu'il soit négatif quand une personne n'est pas malade est aussi égale à 0.95. La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0.001 (0.1% de la population).

1. Quelle est la probabilité qu'un test soit positif ?
2. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie ?
3. Dans quelles conditions un test positif suggère que la personne est malade ? Interpréter le résultat.

Afin d'améliorer la fiabilité du dépistage, on répète le test dans le cas d'un résultat positif (évidemment, la fiabilité p_f de chaque test reste indépendante des résultats précédents).

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(P_n)$ que n tests successifs soient positifs.
5. Une personne est testée successivement n fois positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie ?
6. On notera N la valeur minimale de n qui donne une réponse supérieure à 0.9 à la question précédente. Déterminer numériquement la valeur de N dans le cas : $\mathbb{P}(P|M) = \mathbb{P}(\overline{P}|\overline{M}) = 0.9$, $\mathbb{P}(M) = 0.1$.
7. Donner une explication de l'évolution de la probabilité de la question 5 en fonction de n (en vous aidant d'un tableau ($1 \le n \le N$) de différentes probabilités que vous jugez utiles).

[Soit deux événements, A et B, et $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On dira que l'événement B suggère l'événement A si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$.]

Exercice 3

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Exercice 4

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?