My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com



# Ensembles & Applications

**Auguste De Morgan (1806-1871)**

Mathématicien et logicien britannique, orphelin à l'age de 10 ans était né en Inde d'un père colonel dans l'armée. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan. Ses talents mathématiques ont été découverts lorsqu'il avait quatorze ans. Il avait un problème à un oeil, ce qui lui rendait plus difficile la pratique du sport et le rendait sujet à des moqueries.Ses enfants meurent trés jeunes, il n'aimait plus la campagnie et passait le reste de sa vie dans des librairies poussiéreuses de la métropole.

### Blaque du jour

- Un prof estime que les notes de ses étudiants sont trés gonflé et veut les serrer un peu lus avant de le conseil. Combien va-t-il donner à un étudiant qui a eu 0 ?
  Réponse : 8 (belle ceinture, non ? != 
- Et puisqu'il est toujours question de 8, que vaut 8 divisé par 2 ?
  Réponse : Verticalement, ça donne 3, horizontalement, ça donne 0.
- Quel animal est le plus doué dans le calcul de $\cot^4(a^5)$ ?
  Réponse : Le coq, parce que pour lui ca vaut cot(cot(cot(cot(aaaaa)))) !

## 1 Ensembles

### Exercice 1

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les trois sous-ensembles $A = \{1.3; 5; 7; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $C = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\overline{A},\ B \setminus A,\ A \cup B \cup C,\ \overline{C} \cup \overline{B},\ A \cup (B \cap C).$$

### Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles $A = [4; 12]$; $B = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants :

$$A \cup B,\ A \cap C,\ \mathbb{R} \setminus B,\ A \cap \overline{C},\ (A \cup B) \cap C,\ A \cup (\cap C),\ \overline{A} \cap (\overline{B} \cup C).$$

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com



## Exercice 3

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un même ensemble $E$.

❶ Montrer que : $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

❷ On pose $A * B = \overline{A \cap B}$. Exprimer le plus simplement possible les ensembles suivants :

- $A * A$, $(A * A) * (B * B)$ ;
- $(A * B) * B$, $A * (B * B)$, $(A * B) * (A * B)$.

## Exercice 4

Soit $E$ un ensemble et soient $X, Y$ et $Z$ des sous-ensembles de $E$. Simplifier les expréssions suivantes

❶ $(X \cap Y) \cup (X \cap Y)$ ;

❷ $(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$ ;.

❸ $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap Y)$ ;

❹ $(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y)$ ;

## Exercice 5

Démontrer les relations suivantes

❶ $(X \cap Y) \subset (X \cap \overline{Z}) \cap (Y \cup Z)$ ;

❷ $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.

## Exercice 6

**Différence symétrique** : $A$ et $B$ sont des parties d'un ensemble E. On pose

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Donner une représentation géométrique puis montrer que :

❶ $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

❷ $A \Delta B = B \Delta A$ ;

❸ $A \Delta \emptyset = A$ ;

❹ $(A \Delta B = A \cap B) \Rightarrow (A = B = \emptyset)$.

❺ $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

❻ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

❼ $A \Delta A = \emptyset$ et que $A \Delta B = \emptyset \Rightarrow A = B$

❽ $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$.

## Exercice 10

L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de :

- $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?
- $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ?
- $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ ?

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com



# 2 Applications

### Exercice 7

Pour chacune des fonctions suivantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de 1 et leurs valeurs quand il y en a.

- $f(x) = x + 5$ ;
- $f(x) = x^+ 2x + 2$ ;
- $f(x) = x^2 + x + 2$ ;
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} - 3x + 2$ ;
- $f(x) = e^x + 6e^{-x} + 5$.

### Exercice 8

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Pour chacune des fonctions suivantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de $y$ et leurs valeurs quand il y en a.

- $f(x) = x + 5$ ;
- $f(x) = x^+ 2x + 2$ ;
- $f(x) = x^2 + x + 2$ ;
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} - 3x + 2$ ;
- $f(x) = e^x + 6e^{-x} + 5$.

### Exercice 9

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ :

- $f(n) = n + 5$ ;
- $f(n) = n^2$ ;
- $f(n) = n + 1$ si $n$ est pair, et $f(n) = n - 1$ si $n$ est impair ;
- $f(n) = E(n)$ ;
- $f(n) = |n - 10|$.

### Exercice 11

**Les Classiques**

❶ Soient $f$ une application d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$ et $g$ une application de $F$ vers un ensemble $G$.

- Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ $f$ injective ;
- Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective.

❷ Soient $f, g$ et $h$ des applications d'un ensemble non vide $E$ dans lui-même telle que $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. Montrer que :

- $h$ et $f$ sont injective.
- $h$ est surjective puis bijective.
- $f \circ g$ est surjective (penser à composer par $h^{-1}$), que $f$ est surjective puis que $f$ est bijective.
- $g$ est injective et surjective (penser à composer par $h^{-1}$ et $f^{-1}$), puis que $g$ est bijective.

❸ Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ dans lui-même telle que $f \circ f = f$. Montrer que :

- Si $f$ est injective alors $f$ est surjective ;
- Si $f$ est surjective alors $f$ est injective ;