My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Fonctions Rèelles

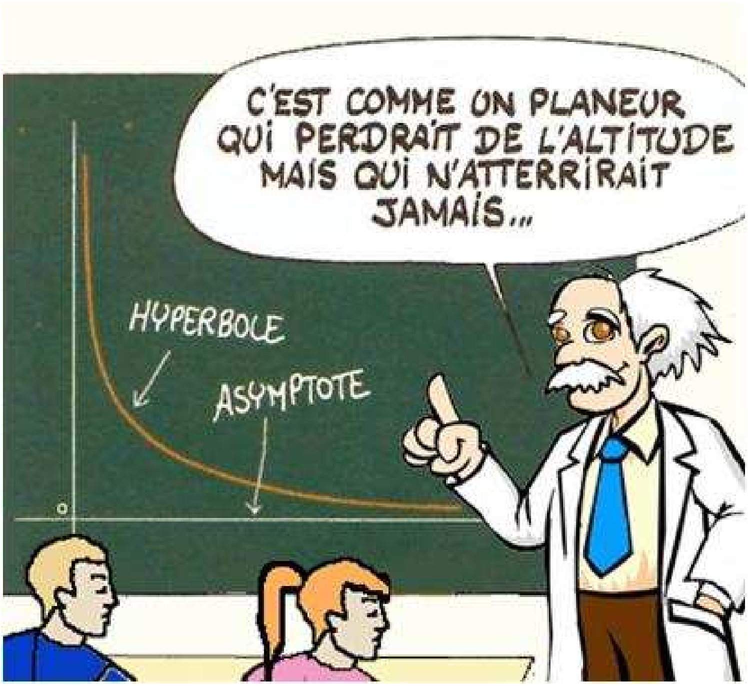
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. Il est à l'origine du terme de « fonction » , de celui de « coordonnées », de la notation du produit de a par b sous la forme "a.b" ou "ab", de la notion de "dérivé", ...

Blaque du jour

- If **ABCDEF=1+2+3+4+5=15%**, then **KNOWLEDGE=11+14+15+23+12+5+4+5+7=96%** and **HARDWORK=8+1+18+4+23+15+18+11=98%**. If both are important, they fall to attain 100%.
- However, **LAZINESS=12+1+...=105%**, **NEGATIVITY=14+5+7+...=132%** and **PROCRASTINATION=16+18+15+...=198%**.
- The worst is that **Selling your soul to Satan = 19+5+12+...=314%=3,14=π**.

Source : **ElAlami Marouane, ECT 1, 2015-2016**



My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

1 LEs Echauffements

Exercice 1

- Préciser le domaine de définition pour chacune des fonctions suivantes.
- Etudier leur injection, surjection, bijection.
- Pour celles bijectives, donner l'application réciproque.

$$f_1(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad f_2(x) = (\ln x)^2 + 3\ln x + 2$$

$$f_4(x) = e^x + e^{-x} - 2 \qquad f_5(x) = e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4$$

$$f_6(x) = x^2 - 3x + 4 + \frac{8-6x}{x^2-2} \qquad f_7(x) = \frac{x^3+2x^2-x+1}{x-1} - (2-x+x^2)$$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

- **niveau 1** : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$
  d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\exp(3x^2)}{x^6}$ f) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$
- **niveau 2** : a) $\lim\limits_{x\to0^+} \left[3x^2 + (\ln x)^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\exp(x^2) - e^{3x} + x^2\right]$
  c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-3x} - \frac{1}{x} + x - e^{x^2})$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x^2+1) - 2\ln x)$

Exercice 3

Etudier les branches infinies pour les fonctions suivantes :

en $+\infty$: $a(x) = \frac{x^2+e^x}{x+1}$ $b(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $c(x) = \frac{x^2+x\ln x}{x+1}$ $d(x) = \frac{xe^x+1}{e^x+1}$

en $-\infty$: $a(x) = \frac{x^2+e^x}{x+1}$ $b(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $c(x) = \frac{xe^x+1}{e^x+1}$ $d(x) = \ln(e^x+e^{-x})$

Exercice 4

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer ensuite les dérivées correspondantes.

$$a(x) = \ln(1+x^2) \quad b(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1} \quad c(x) = \exp(x+1/x) \quad d(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

Exercice 5

Représenter graphiquement les fonctions sur leur domaine de définition respectif.
Etudier graphiquement la continuité de ces fonction. En revenant à la définition, justifier la continuité ou la non continuité de chacune de ces fonctions.

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Justifier les inégalités suivantes :

a) $\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant x - 1$ b) $\forall x > 0, \quad \frac{2}{x} + \frac{x}{5} \geqslant 2\sqrt{10}$

c) $\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[, \quad x\ln\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{e}$ c) $\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Exercice 7

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

Exercice 8

Montrer que l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = 1$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
Si α désigne cette solution, justifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Exercice 9

Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?
Valeurs numériques : $e = 2.718 \pm 10^{-3}, \quad e^{1/2} \simeq 1.648 \pm 10^{-3}$

Exercice 10

On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que l'équation $x + \ln x = 2005$ admet une seule solution α sur $]0, +\infty[$ et que $1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998$
   Valeurs numériques : $\ln 1997 \simeq \ln 1998 \simeq 7.6 \pm 10^{-1}$.

Exercice 11

Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ des équations suivantes

$$(E_1) \quad : \quad 2x^3 - 3x^2 - 12x = 1$$
$$(E_2) \quad : \quad 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 = 8$$

Exercice 12

Déterminer la convexité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition respectif (ainsi que les éventuels points d'inflexions) puis tracer le graphe de ces fonctions.

$a : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1 \quad b : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1} \quad c : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 13

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexite et la présence éventuelle de points d'inflexion.

$$f(x) = \ln(1+x^2) \quad g(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$$
$$h(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad i(x) = \frac{2\ln x + 3}{x}$$

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

2 LEs Musculations

Exercice 14

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Expliciter le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Qu'en déduit-on sur f ?
3. Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
4. Donner le sens de variations de f sur son domaine de définition.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]e, +\infty[$.
6. Déterminer la nature de l'asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la nature des asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. Est-elle continue en 0 ?
   On admettra dans la suite que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Expliciter la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
   $$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$
4. Dresser le tableau complet des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (limites et extrémas inclus).
5. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $[0; 1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0; 1[$ (0 compris).
2. Déterminer si f est convexe ou concave sur $[0; 1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 17

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$	$f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$	$f_3(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
$f_4(x) = \dfrac{2x+1}{x-2} 2x + 1 \mathbb{R} - \{2\}$	$f_5(x) = (x-3)^2 - (x+3)^2$ sur $\mathbb{R}$	$f_6(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f_7(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ sur $[-1; 1]$	$f_8(x) = e^x + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$	$f_9(x) = e^x - e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

3 LEs Must

Exercice 18

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Expliciter le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Qu'en déduit-on sur f ?
3. Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
4. Donner le sens de variations de f sur son domaine de définition.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]e, +\infty[$.
6. Déterminer la nature de l'asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.

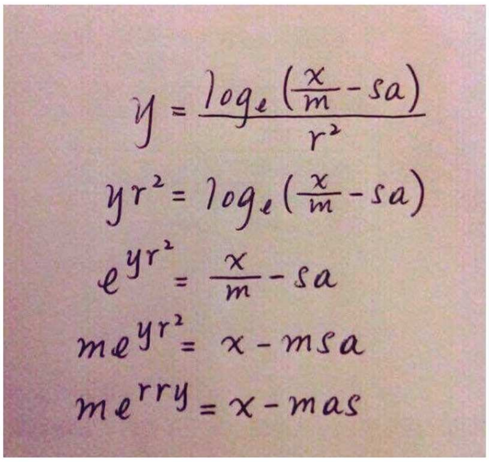
Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la nature des asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. Est-elle continue en 0 ?
   On admettra dans la suite que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Expliciter la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
   $$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$
4. Dresser le tableau complet des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (limites et extrémas inclus).
5. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Quand un ECT veux souhaiter Joyeux Noel



My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

4 LEs Type-Concours

Exercice 20

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$
   - a. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   - b. Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   - c. Etablir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{5}$.

2. Pour tout entier strictement positif n, on considère l'équation

$$(E_n) : x^3 + 5x = n$$

   - a. Justifier que pour tout entier n, l'équation (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. On note α_n cette solution.
   - b. Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   - c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \leqslant \alpha_n \leqslant \sqrt[3]{n}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$.
   - d. Justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \left(\dfrac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1$.
     A l'aide de la question précédente, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$

3. Pour tout entier naturel n, on considère l'équation

$$(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$$

   - a. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
     On note β_n cette solution.
   - b. Calculer $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < \beta_n \leqslant \dfrac{1}{5}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.
   - c. En utilisant l'équation satisfaite par β_n, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.
   - d. On souhaite déterminer la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$.
     Pour cela, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 5x - 1$.
     - i. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
     - ii. En évaluant cette inégalité en $x = \beta_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(\beta_n)$.
     - iii. Que vaut $f_{n+1}(\beta_{n+1})$? Déduire de cette question et de la précédente que

$$\forall n \geqslant 0, \quad f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

     - iv. Quelle est la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$?

Fin