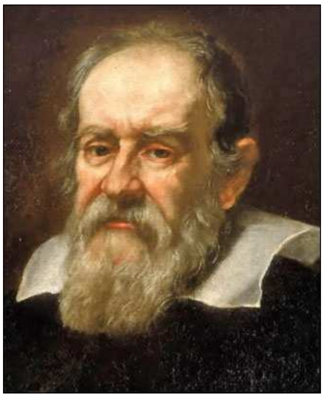
My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Polynômes

Euclide (325 av JC - 265 av JC)

Mathématicien grèque, son ouvrage le plus célèbre, les Éléments, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. Il porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique. L'ouvrage a connu des centaines d'éditions en toutes langues et ses thèmes restent à la base de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire dans de nombreux pays.
Du nom d'Euclide, dérivent en particulier l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne, la division euclidienne.



Blaque du jour

- Qu'offre un mathématicien à sa fiancée quand il la demande en mariage ? Réponse : Un anneau polynomial !
- Une jeune mariée est découragée par l'obsession de son mari pour les mathématiques. Effrayée à l'idée de passer au second plan, elle lui demande :
  – Est-ce que tu aimes les mathématiques plus que moi ?
  – Mais bien sûr que non, mon amour, je t'aime bien plus !
  – Alors, prouve-le !
  – Ok... . Tu sais que c'est toi la racine de mon amour ? Imaginons que le monde des femmes est un polyômes, et qu'il est de degré infini et donc admet il admet une infinité de racines. Pour trouver toutes ses racines, il faut faire une division euclidienne, ...

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, les deux expressions $P(x)$ et $Q(x)$ sont-elles égales ?

❶ $P(x) = 7(x - \frac{1}{2}) + 3$ et $Q(x) = 7x - \frac{4}{2}$;

❷ $P(x) = 3x^2 - 10x + 32$ et $Q(x) = 3(x-5)^2 + 7$;

❸ $P(x) = (x+1)^2 - 4$ et $Q(x) = (x+3)(x-1)$;

❹ $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x$ et $Q(x) = x(2x-1) + x^2(-x+3)$.

Exercice 2

On définit $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Calculer : $P(0), P(1), P(-1), P(1/2), P(-2)$ et $P(3)$.

Exercice 3

Déterminer le degré des polynômes suivants :

$P(x) = 2(x-3)^2 + 1$	$Q(x) = x$
$R(x) = x(7x^2 - 2) + x^2(3 - 7x) + x^2$	$S(x) = (x - x^3)(2x^2 - 1) + 2x^5$

Exercice 4

Dans chaque cas, effectuer la somme, puis le produit des deux polynˆomes P et Q (le résultat est attendu sous forme réduite et ordonnée). Quel constat peut-on faire sur le degré du résultat de chaque opération, par rapport aux degrés des polynômes de départ ?

❶ $P(x) = 2x^3 - 7$ et $Q(x) = 4x - 2x^3$;

❷ $P(x) = 3x^4 - x + 2$ et $Q(x) = -7x^3 + 3$;

❸ $P(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3$ et $Q(x) = -x^4 - 3x + 12$;

❹ $P(x) = -x^{11} + 3x^7 - 2$ et $Q(x) = -5x^7 + x^6 - x$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer des fonctions affines passent par le point A et ayant pour coefficient directeur m.

$A(0;3), m = 2$	$A(3;2), m = 0$
$A(2;1), m = -3$	$A(-1;1), m = 2$

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes (avec le moins de calculs possible) :

$5(3x-2) - (4x-1) = 2x+7$	$-7(4x-1)(8x-10)(9x-6) = 0$
$54(6-5x)x(10x-9) = 0$	$(2x-1)^2 - (4x+3)(x-2) = 0$
$(3x+4)2 - 2(3x+4)(5x-1) = 0$	$(3x-5)^2 = (4x+1)^2$
$-7(2x+4) + 11x > 4(x-2)$	$4(x-3)2 < (2x+1)^2$

Exercice 7

Les fonctions d'offre et de demande d'un bien sont données pour une quantité q variant de 1 à 8 tonnes, par les fonctions suivantes : offre : $f(q) = q^2+2q+19$; demande : $g(q) = q^2-18q+113$. f et g sont des prix donnés en euros.

❶ Pour quelle quantité l'offre est-elle de 54 euros ?

❷ Pour quelle quantité la demande est-elle de 68 euros ?

❸ Résoudre l'équation $f(q) = g(q)$ et en déduire la quantité d'équilibre du marché offre-demande, puis le prix d'équilibre.

❹ Montrer que l'offre et la demande admettent chacune un minimum dont on précisera la valeur. Intérpréter ce résultat.

Exercice 8

☛ Effectuer la division euclidienne de :

❶ $2x^3 - x2 + 4x + 7$ par $x + 1$,

❷ $2x^3 - x^2 + 10x - 5$ par $x^2 + 5$.

❸ $2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 20x^2 + 23x - 4$ par $x^2 - 3x + 4$.

☛ Trouver les racines, puis donner le tableau de signes des polynômes suivants :

❶ $2x^3 - x2 + 4x + 7$.

❷ $2x^3 - x^2 + 10x - 5$.

❸ $2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 20x^2 + 23x - 4$.

Exercice 9

Soit $P(x) = x^3 - \frac{7}{3}x^2 - 2x$.

❶ Factoriser au maximum ce polynôme, et préciser ses racines.

❷ On définit $Q(x) = -2x^3 - 4x^2 + 22x + 24$. Déterminer une racine évidente de $Q(x)$, puis factoriser ce polynôme le plus possible. Construire le tableau de signe de $Q(x)$.

❸ Soit R le polynôme donné par $R(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$. Factoriser ce polynôme au maximum et donner son tableau de signe.

❹ On appelle S le polynôme $S(x) = -2x^3 - 4x^2 + 46x + 120$. Calculer $S(-4)$ puis résoudre l'équation $S(x) = 0$. Factoriser S au maximum.

❺ Soit $T(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$. Calculer $T(-3)$ et en déduire une factorisation de $T(x)$ puis résoudre l'inéquation $T(x) > 0$.

Exercice 10

Factoriser les expressions suivantes :

$f(x) = 4x^2 - 7x$	$g(x) = x(3x+4) - x(-2x+5)$
$h(x) = -x^2 - 3x + 4$	$i(x) = (x-3)x^2 + x - 3$
$j(x) = x(2x-1) + (2x-1)(3x^2-7)$	$k(x) = 4x^2 - 9$
$\ell(x) = 7x^2 - 14x - 21$	(on pourra calculer $\ell(-1), \ell(3)$)