My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

CONCOURS ECRICOME PREPA APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

LUNDI 2 MAI 2016

Test Bonus

Matrices

Durée : 1 heure

ANNALES DU CONCOURS ECRICOME PREPA 2015 : ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES TECHNOLOGIQUE -

Exercice 1

Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = QMQ$.

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.
2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Etude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une d ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que le deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
- A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n ».

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
   Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$
4. (a) Vérifier que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$
   où la matrice M a été définie dans la partie I.

(b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

Exercice 2

On rappelle que $e = e^1 \simeq 2{,}7$.
On considère la fonction f définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$.
2. Pour $x \in D$, Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D.
   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in D$.
   (b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.
5. (a) Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e.$$

   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.
6. (a) Montrer que :

$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

7. (a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   (c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Corrigé

Exercice 1

Partie I

1. On remarque que $Q\times Q=I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Ainsi la matrice Q est inversible et son inverse est : $Q^{-1}=Q$.
2. On calcule le produit de matrices :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1/2&1/4\\0&1/2&1/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&2&1\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&2&1\\0&-2&-2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice D est donc bien diagonale.
On a alors :

$$D=QMQ \Longleftrightarrow Q^{-1}DQ^{-1}=M \iff QDQ=M \iff M=QDQ$$

3. Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: « $M^n=QD^nQ$ »
   - Pour $n=0$, on a $M^0=I_3$ et $QD^0Q=Q^2=I_3$. Ainsi, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   - Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vérifiée. On a alors :

   $$M^{n+1}=M^nM\overset{(\mathcal{H}(n))}{=}(QD^nQ)(QDQ)=QD^nDQ=QD^{n+1}Q$$

   donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$.
4. On a alors :

$$\begin{aligned}
M^n=QD^nQ &= \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(\frac{1}{2})^n&0\\0&0&(\frac{1}{4})^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-(\frac{1}{2})^n&-2(\frac{1}{2})^n\\0&0&(\frac{1}{4})^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&1-(\frac{1}{2})^n&1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n\\0&(\frac{1}{2})^n&2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n\\0&0&(\frac{1}{4})^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II

1. On lance une fois les deux pièces. Notons P_1 (reps. P_2) l'événement « On fait Pile avec la pièce numéro 1 (resp. numéro 2) ». On a alors :

$$a_1=P(A_1)=P(F_1\cap F_2)=P(F_1)P(F_2)=\frac{1}{4}$$

$$b_1 = P(B_1) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$c_1 = P(C_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{4}$$

2. Si A_n est réalisé, on a obtenu 0 Pile à l'étape n, donc on ne va lancer aucune pièce à l'étape $n+1$. Ainsi, on est certain que A_{n+1} sera réalisé.
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$
Si B_n est réalisé, on a obtenu 1 Pile à l'étape n, donc on va lancer une pièce à l'étape $n+1$. On obtient A_{n+1} si et seulement si cette pièce donne Pile, on a donc :
$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$
Si C_n est réalisé, on a obtenu 2 Pile à l'étape n, donc on va lancer deux pièces à l'étape $n+1$. On est dans la même configuration que l'étape 1, donc :
$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$
Soit $n \geqslant 1$. On sait que (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, donc d'après la formules des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$
De même, on obtient :
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. On a donc bien pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
Pour $n = 1$, on a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Alors :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$
Donc par récurrence, la formule est bien vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.