My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Devoir Maison
Probabilités

Dans un pays imaginaire, on admet qu'un jour donné soit il fait beau, soit il pleut !
S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$. S'il pleut un jour, alors il pleuvra encore le lendemain avec un probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
Aujourd'hui il pleut.
On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, dans 3 jours, ..., dans n jours.

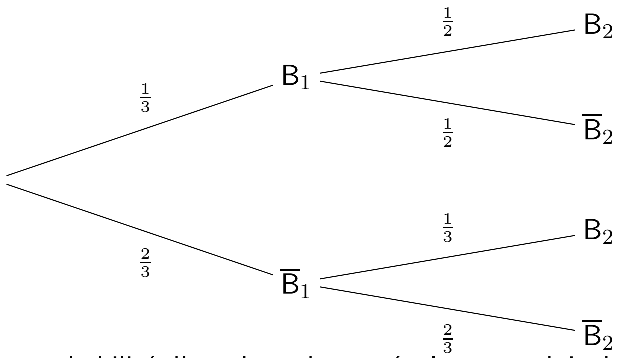
1. Pour $n \geqslant 1$, on désigne par B_n l'événement « il fera beau dans n jours ».
   a. Illustrer par un arbre pondéré l'évolution possible de la météo pour demain et après demain. Donner $P(\mathsf{B}_1)$ et calculer $P(\mathsf{B}_2)$.
   b. Donner, pour $n \geqslant 1$, les valeurs de $P_{\mathsf{B}_n}(\mathsf{B}_{n+1})$ et $P_{\overline{\mathsf{B}}_n}(\mathsf{B}_{n+1})$.
   Exprimer $P(\mathsf{B}_{n+1} \cap \mathsf{B}_n)$ et $P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \overline{\mathsf{B}}_n\right)$ en fonction de $P(\mathsf{B}_n)$.
   Prouver que, pour $n \geqslant 1, P(\mathsf{B}_{n+1}) = \frac{1}{6}P(\mathsf{B}_n) + \frac{1}{3}$.
2. On suppose désormais, pour $n \geqslant 1, p_n = P(\mathsf{B}_n)$ et $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a. Prouver que (u_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.
   c. Étudier le sens de variation de la suite (p_n) et montrer que cette suite admet une limite que l'on calculera. Peut-on interpréter ces résultats ?

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Devoir Maison Probabilités

Corrigé

1. a. À l'aide des informations données dans l'énoncé, on construit l'arbre pondéré suivant sachant qu'il pleut aujourd'hui :



La probabilité d'une branche est égale au produit des poids situés sur cette branche.

On a $P(B_1) = \dfrac{1}{3}$.

B_1 et $\overline{B}_1$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P\left(B_2 \cap \overline{B}_1\right) \\
&= P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{\overline{B}_1}(B_2) \times P\left(\overline{B}_1\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\
P(B_2) &= \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

b. Soit $n \geqslant 1$:

on a $P_{\mathsf{B}_n}\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{\mathsf{B}}_n}\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Donc $P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \mathsf{B}_n\right) = P_{\mathsf{B}_n}\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) \times P\left(\mathsf{B}_n\right)$, soit $P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \mathsf{B}_n\right) = \dfrac{1}{2} P\left(\mathsf{B}_n\right)$.

et $P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \overline{\mathsf{B}}_n\right) = P_{\overline{\mathsf{B}}_n}\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) \times P\left(\overline{\mathsf{B}}_n\right) = P_{\overline{\mathsf{B}}_n}\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) \times \Big(1 - P\left(\mathsf{B}_n\right)\Big)$,

soit $P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \mathsf{B}_n\right) = \dfrac{1}{3}\Big(1 - P\left(\mathsf{B}_n\right)\Big)$.

B_n et $\overline{\mathsf{B}}_n$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) &= P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \mathsf{B}_n\right) + P\left(\mathsf{B}_{n+1} \cap \overline{\mathsf{B}}_n\right) \\
&= \frac{1}{2} P\left(\mathsf{B}_n\right) + \frac{1}{3}\Big(1 - P\left(\mathsf{B}_n\right)\Big) \\
&= \frac{1}{6} P\left(\mathsf{B}_n\right) + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1, P\left(\mathsf{B}_{n+1}\right) = \dfrac{1}{6} P\left(\mathsf{B}_n\right) + \dfrac{1}{3}$.

2. Pour $n \geqslant 1, p_n = P\left(\mathsf{B}_n\right)$ et $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a. Soit $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \quad \text{d'après la question 1.b} \\
&= \frac{1}{6} p_n - \frac{1}{15} \\
&= \frac{1}{6} p_n - \frac{2}{30} \\
&= \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{1}{6} u_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1, u_{n+1} = \dfrac{1}{6} u_n$. la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{1}{15}$.

b. Puisque (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{15}$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ soit $u_n = -\dfrac{1}{15} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1$.

Comme $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}, \forall n \geqslant 1$, on a $p_n = u_n + \dfrac{2}{5}$ soit $p_n = -\dfrac{1}{15} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}, \quad \forall n \geqslant 1$.

c. Soit$n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

On en déduit que $p_{n+1} - p_n > 0, \quad \forall n \geqslant 1$. La suite (p_n) est donc croissante.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$. Comme $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{5}$ par somme et produit.

L'interprétation est sujette à discussion.