My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Samedi 14 Novembre 2015

Devoir Surveillé

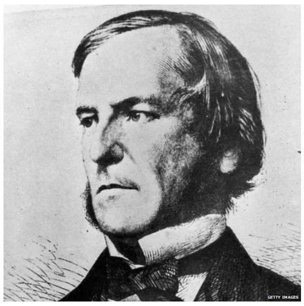
Logique Mathématique & Suites Numérique

Durée : 3 heures

Calculatrice autorisée

George Boole (1815-1864)

Logicien, mathématicien et philosophe irlandais. Il est le créateur de la logique moderne, fondée sur une structure algébrique et sémantique, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur. N'acceptant que deux valeurs numériques : 0 et 1. Cette algèbre aura de nombreuses applications en téléphonie et en informatique. Autodidacte, il publia ses premiers travaux d'algèbre tout en exerçant son métier d'instituteur et de directeur d'école. Au fait, issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller à l'université. Obligé de travailler pour soutenir sa famille, il devient enseignant à 16 ans. Quatre ans plus tard, il fonde et dirige sa propre école.



Blaque du jour

Deux personnes qui font une promenade dans une montgolfière sont perdues et décident de redescendre plus bas pour demander leur chemin. Elles aperçoivent sur deux autres personnes qui discutent sur la route et demandent :
- « Excusez-moi, messieurs. Pouvez vous nous dire où nous sommes là ? »
- « Vous êtes dans une montgolfière »
Surprises, les deux personnes de la montgolfière les remercient quand même et reprenne de l'altitude. Un peu plus loin, l'un dit à l'autre : « A mon avis, ces deux là sont des mathématiciens. »
- Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
- Et bien, ils ont mis du temps à nous répondre, leur réponse est parfaitement juste, mais elle ne sert absolument à rien.
Pendant ce temps, les deux mathématiciens se disent : « C'était sûrement des économistes ces deux là. Ils nous posent des questions évidentes, et après, s'ils sont perdus c'est de notre faute. »

1 Logique Mathématique

Exercice 1

Soient P,Q et R trois propositions logiques. Écrire autrement les propositions suivantes à l'aide des connecteurs logiques "et" et "ou". Donner ensuite leurs négations.

❶ $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$.

❷ $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$.

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Exercice 2

Soient P,Q deux propositions logiques. Donner les tables de vérités de chacune des propositions suivantes :

❶ $(\mathrm{P}\ \text{et}\ \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\mathrm{Q}\ \text{et}\ \mathrm{P})$.

❷ $(\mathrm{P}\ \text{ou}\ \mathrm{Q}) \Rightarrow \mathrm{P}$.

❸ Commentez ces tables de vérités.

Exercice 3

On considère les deux propositions suivantes :

- Proposition A : Pour toute porte, il existe une clé qui ouvre la porte.
- Proposition B : Il existe une clé, pour toute porte, la clé ouvre la porte.

❶ Ces deux propositions sont-elles équivalents (i.e. expriment elles la même situation).

❷ Formaliser mathématiquement (i.e. utiliser les symboles mathématiques) les deux propositions A et B, en utilisant les conventions suivantes

- p désigne une porte, et P désigne l'ensemble des portes.
- c désigne une clé, et C désigne l'ensemble des clés.
- $c \Rightarrow p$ signifie que la clé c ouvre la porte p.

❸ Justifier autrement votre réponse donnée pour la question ❶.

On considère les deux propositions suivantes :

- Proposition C : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ (\exists y \in \mathbb{R})$ tel que $y < x$.
- Proposition D : $(\exists y \in \mathbb{R})$ tel que $(\forall x \in \mathbb{R}),\ y < x$.

❹ Ces deux propositions sont-elles équivalents (i.e. expriment elles la même situation).

❺ Donner la véracité de chacune de ces propositions (vraie ou fausse), justifier votre réponse.

❻ Donner la négation de chacune des propositions A, B, C et D.

Exercice 4

❶ Soient a et b deux nombres réels tels que $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$. On rappelle que $a \in \mathbb{Q}$ signifie $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{n}{m}$.

- À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que : $a + b \notin \mathbb{Q}$.
- À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que : $a \times b \notin \mathbb{Q}$.

❷ Soient $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement par contraposée, démontrer que :

$$n^2 \text{ impair } \Rightarrow n \text{ impair }.$$

❸ Soient $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas, démontrer que : n et $n+1$ sont toujours de parités différentes.

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

2 Suites numériques

Exercice 5

❶ **Encadrements**

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$? Justifier votre réponse.
- Sachant que $-2 < x < 3$ et que $-4 < y < -1$, que peut-on en conclure pour $y - x$? Justifier votre réponse.
- Sachant que $8 < x < 9$ et que $-3 < y < 4$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{y}{x}$? Justifier votre réponse.

❶ **Étude de signe** : Dresser le tableau de signes des expréssions suivantes :

- $x^2 - 6x + 3$
- $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x+2}$
- $e^x - 3e^{-x} + 2$

Exercice 6

Dans chacun des cas ci-dessous (en justifiant minutieusement vos réponses) :

- Reconnaître la nature et les caractéristiques de la suite (u_n)
- Exprimer u_n en fonction de n
- Que peut-on dire à propos de la monotonie de (u_n) ?
- Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

❶ $u_2 = -2$ avec (u_n) géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

❷ $u_9 = 1, u_{21} = 60$ avec (u_n) arithmétique.

❸ $u_0 = -1$ avec $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$.

❹ $u_0 = u_1 = 0$ avec $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

❺ $u_0 = -1, u_1 = 0$ avec $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

3 Applications financières

Exercice 7

un société qui loue des DVD a, cette année, 1000 abonnés et chaque année il perd 20% de ces abonnés mais gagne 900 nouveaux abonnés. On pose u_n le nombre d'abonnés (exprimé en millième) après n années. Ainsi 1000 abonnés initiaux signfie que $u_0 = 1$. 5000 abonnés assureront à la sociéte son équilibre financier.

❶ Calculer u_1, u_2 et u_3.

❷ Montrer $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 0,9$. Justifier rigoureusement votre réponse.

❸ Sur un même graphique :

- Tracer les droites $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 0,8 \times x + 0,9$
- Représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
- En déduire les valeurs numériques de u_1, u_2 et u_3, puis comparer avec les résultats obtenus dans la question ❶.
- Conjecturer graphiquement la valuer de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

❹ On pose $v_n = u_n - 4,5$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et donner son premier terme.

❺ En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que l'on a $u_n = 4,5 - 3,5 \times (0,8)^n$.

❻ En déduire u_{10}.

❼ À partir de quelle année la société atteindra son équilibre financier.

❽ Que devient le nombre d'abonnés à long terme ? (justifier votre réponse).

❾ Ce projet est-il rentable à long terme ? (justifier votre réponse).