My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Samedi 5 Décembre 2015

Devoir Surveillé

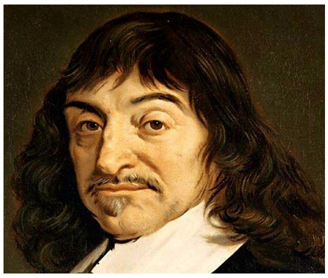
Suites Numériques, Polynômes & Ensembles

Durée : 3 heures

Calculatrice autorisée

René Descartes (1596-1650)

Mathématicien, physicien et philosophe français. Considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne, il est célèbre pour son cogito : « Je pense, donc je suis ».
En physique, il est considéré comme l'un des fondateurs du mécanisme. En mathématiques, il est à l'origine de la géométrie analytique. Les produits cartésiens doivent leur nom à René Descartes, qui, en créant la géométrie analytique, a le premier utilisé $\mathbb{R}^2$ pour représenter le plan (en dimension 2D) et $\mathbb{R}^3$ pour représenter l'espace (en dimension 3D.



Blaque du jour

- **Théorème** : Moins on en sait, plus on gagne. Plus on sait, moins on gagne !!!
- **Preuve** : On sait que la connaissance, c'est le pouvoir et le temps, c'est de l'argent. La loi fondamentale de la dynamique stipule que

$$\text{Puissance} = \frac{\text{travail}}{\text{temps}}$$

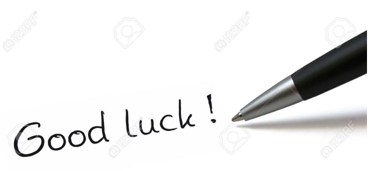
et comme connaissance = pouvoir et temps = argent, on a alors :

$$\text{connaissance} = \frac{\text{travail}}{\text{argent}}.$$

On trouve :

$$\text{argent} = \frac{\text{travail}}{\text{connaissance}}$$

Ainsi, quand la connaissance tend vers zéro, l'argent tend vers l'infini, quel que soit le travail effectué. Belle leçon de société !!!



1 Suites numériques

Exercice 1

Calculer les limites des suites suivantes

❶ $u_n = \dfrac{2n - \sqrt{n}}{n+1}$;

❷ $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\ln n - n}$.

Exercice 2

❶ Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ sont adjacentes.

❷ Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

❶ Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❷ Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

❸ Que peut-on dire à propos de la monotonie de (u_n) ?

❹ Que peut-on dire à propos de la convergence (u_n) ?

❺ Que peut-on dire à propos de la limite (u_n) en cas où elle converge.

❻ On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

❼ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

❽ Reprendre autrement les questions [❸], [❹] et [❺].

Exercice 4

Dans tout cet exercice, on pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2}$.

❶
- ☛ Préciser u_0, u_1, u_2, u_3.
- ☛ Que peut-on dire à propopos de la monotonie de la suite (u_n) ?
- ☛ Justifier soigneusement votre réponse.

Dans la suite de cet exercice, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

❷ Calculer v_0, v_1, w_0 et w_1.

❸
- ☛ Montrer que $v_{n+1} = v_n^4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ☛ Montrer par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❹ Etudier la monotonie de (v_n).

❺ En déduire que (v_n) converge, puis préciser sa limite.

❻
- ☛ Montrer que $w_{n+1} = w_n^4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ☛ Montrer par récurrence que $1 \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❼ Etudier la monotonie de (w_n).

❽
- ☛ Montrer que (w_n) ne peut pas converger vers une limite finie.
- ☛ En déduire sa limite

❾ En déduire que (u_n) diverge.

2 Polyômes

Exercice 5

❶ On pose $P(x) = -x^2 + x + 2$, donner ses racines, son tableau de signe puis dessiner soigneusement sa représentation graphique.

❷ Donner tous les polynomes de degré 2, verifiant les 3 équations suivantes $P(1) = -1$ $P(-1) = 1$ et $P(-2) = 0$. Dessiner ensuite soigneusement la représentation graphique.

Exercice 6

Factoriser les polynômes suivants, puis donner leur tableaux de signe :

❶ $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$.

☛ **Indication** : Remarquer que $P(1) = 0$.

❷ $Q(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2$.

☛ **Indication** : Remarquer que $Q(2) = 0$ puis chercher une racine évidente de $Q(x)$.

❸ $Q(x) = x^6 - 9x^3 + 8$.

☛ **Indication** : Penser à un changement de variable.

3 Ensembles

Exercice 7

Soient A, B et C trois sous-ensembles non vides d'un même ensemble E.

❶ Hachurer graphiquement l'ensemble suivant : $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

❷ Hachurer dans un autre graphique l'ensemble suivant : $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

❸ Que remarquez vous ?

❸ Montrer rigoureusement que $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.