My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

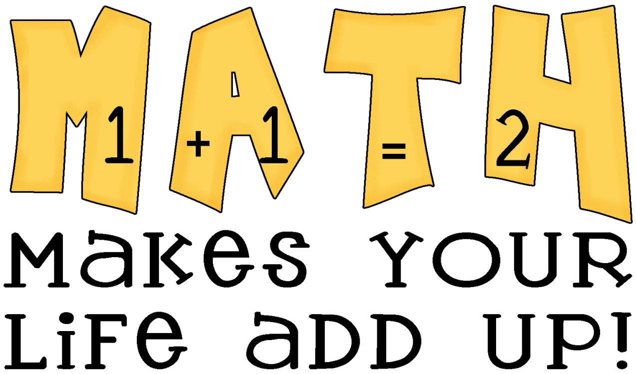
Samedi le 26 Mars 2016

Devoir Surveillé N°6

Probabilités

Durée : 3 heures

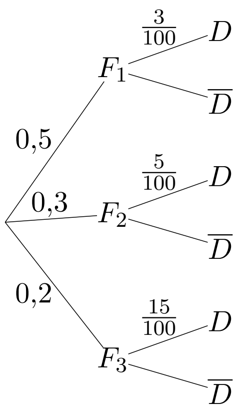
Corrigé



Exercice 1

1. Puisque l'énoncé nous précise que le premier tirage a lieu dans U_1 qui contient deux boules de chaque couleur, $u_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Pour le deuxième tirage, cela dépend de ce qui s'est passé au premier. On a, au vu du calcul précédent, une probabilité $\frac{1}{2}$ de tirer dans chaque urne. La formule des probabilités totales nous donne alors $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.
2. Pour le savoir, calculons donc $P(B_1 \cap B_2)$. On a $P(B_1) = \frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$. En fait cette dernière probabilité suffit à conclure que les deux évènements ne sont pas indépendants puisqu'elle est différente de $P(B_2)$.
3. Au vu de l'énoncé, on aura toujours $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (puisqu'on effectuera le tirage $n+1$ dans l'urne 1) et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans ce cas, on tire dans l'urne 2).
4. Les évènements B_n et $\overline{B_n}$ formant évidemment un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}$.
5. On reconnait une suite arithmético-géométrique dont l'équation de point fixe $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, donne $x = \frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{3}$, et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$. Comme par ailleurs $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, on en déduit que $v_n = \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$, puis $u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. La limite de u_n vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 2 : ESC 2008.



1. **(a)** D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(F_3) = 20\% = \boxed{0,2}$.

(b) On utilise la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $\{F_1; F_2; F_3\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}_{F_1}(D) + \mathbf{P}(F_2)\mathbf{P}_{F_2}(D) + \mathbf{P}(F_3)\mathbf{P}_{F_3}(D)\\ &= 0,5\times 0,03 + 0,3\times 0,05 + 0,2\times 0,15\\ &= 0,15 + 0,15 + 0,3\\ &= \underline{0,06}\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule de probabilité des causes :

$$\mathbf{P}_D(F_3) = \frac{\mathbf{P}(F_3)\mathbf{P}_{F_3}(D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{0,2\times 0,15}{0,06} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\text{si la pièce est défectueuse, il y a une chance sur deux qu'elle provienne de la machine } M_3.}$

2. **(a)** On vient de démontrer que $\mathbf{P}_D(F_3) = \frac{1}{2} = 0,5$.
Or $\mathbf{P}(F_3) = 0,2$, donc $\mathbf{P}_D(F_3) \neq \mathbf{P}(F_3)$ donc $\boxed{\text{les événements } D \text{ et } F_3 \text{ ne sont pas indépendants.}}$

(b) Les ampoules non défectueuses ($\overline{D}$) sont toutes mises en vente. De plus, puisque le défaut de la machine 3 n'est pas grave, finalement, pour une ampoule provenant de la machine 3, on ne regarde pas si elle est défectueuse ou non, toutes les ampoules fabriquées par la machine 3 sont mises en vente. Les ampoules mises sur le marché sont ainsi des ampoules non défectueuses, ou provenant de la machine 3 (ou non défectueuses et provenant de la machine 3).
Ainsi, $\boxed{\text{« l'ampoule est mise sur le marché » correspond bien à } \overline{D}\cup F_3}$

Alors $\mathbf{P}\left(\overline{D}\cup F_3\right) = \mathbf{P}(\overline{D}) + \mathbf{P}(F_3) - \mathbf{P}(\overline{D}\cap F_3)$
Or $\mathbf{P}(\overline{D}) = 1 - 0,06 = 0,94$ et $\mathbf{P}(\overline{D}\cap F_3) = \mathbf{P}(F_3)\times\mathbf{P}_{F_3}(\overline{D}) = 0,2\times 0,85 = 0,17$
Donc $\mathbf{P}\left(\overline{D}\cup F_3\right) = 0,94 + 0,2 - 0,17 = \boxed{0,97}$.

$\boxed{\text{La probabilité que l'ampoule soit mise sur le marché est donc 0,97.}}$

3. **(a)** $\underline{A = D_1\cap D_2\cap D_3}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(D_1\cap D_2\cap D_3)\\ &= \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}_{D_1}(D_2)\mathbf{P}_{D_1\cap D_2}(D_3) \quad \text{(formule des probabilités composées)}\\ &= \mathbf{P}(D_1)\times\mathbf{P}(D_2)\times\mathbf{P}(D_3) \quad \underline{\text{par indépendance des tirages successifs car on considère qu'il y a remise}}\\ &= \frac{5}{100}\times\frac{5}{100}\times\frac{5}{100}\\ &= \frac{125}{1\,000\,000} = \boxed{0,000125}\end{aligned}$$

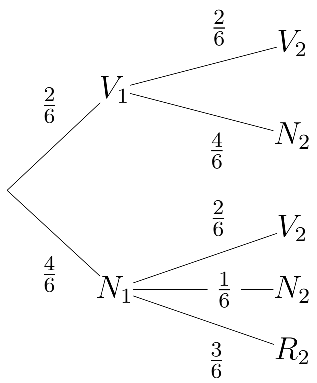
(b) $\underline{B = \overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap D_3}$
Alors, par la même formule,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap D_3)\\ &= \mathbf{P}(\overline{D_1})\mathbf{P}_{\overline{D_1}}(\overline{D_2})\mathbf{P}_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}}(D_3)\\ &= \mathbf{P}(\overline{D_1})\mathbf{P}(\overline{D_2})\mathbf{P}(D3) \quad \underline{\text{par indépendance des tirages successifs}}\\ &= \boxed{\frac{95}{100}\times\frac{95}{100}\times\frac{5}{100}}\end{aligned}$$

Exercice 3

Exercice 4

1.



2. $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbf{P}(N_1) \times \mathbf{P}_{N_1}(N_2)$ par la formule des probabilités composées

$= \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$

Donc $\boxed{\mathbf{P}(D) = \frac{1}{9}}$.

3. $\mathbf{P}_{N_1}(V_2) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$ car lorsque le premier lancer donne une face noire, c'est le dé A qui est lancé pour le 2ème tirage.

4. $\mathbf{P}(V_2) = \mathbf{P}(V_1 \cap V_2) + \mathbf{P}(N_1 \cap V_2)$ par la formule des probabilités totales avec $\overline{V_1} = N_1$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(V_1)\mathbf{P}_{V_1}(V_2) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(V_2) \\
&= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \\
&= \frac{4}{36} + \frac{8}{36} \\
&= \frac{12}{36} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité que l'on obtienne une face verte au deuxième lancer est } \frac{1}{3}.}$

5. Par la formule de probabilité des causes, $\mathbf{P}_{V_2}(V_1) = \dfrac{\mathbf{P}(V_1)\mathbf{P}_{V_1}(V_2)}{\mathbf{P}(V_2)} = \dfrac{\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{36} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{1}{3}$.

$\boxed{\text{Lorsque l'on a obtenu une face verte au deuxième lancer, la probabilité que le premier lancer ait aussi donné une face verte est de } \frac{1}{3}.}$

6. $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants si } \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B).}$

Ici, $\mathbf{P}(N_2) = \mathbf{P}(V_1)\mathbf{P}_{V_1}(N_2) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2)$ par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{8}{36} + \frac{4}{36} \\
&= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

D'autre part, $\mathbf{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{6}$.

Ainsi, $\mathbf{P}(N_2) \neq \mathbf{P}_{N_1}(N_2)$ donc $\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

Exercice 5 : Ecricome 2004

1. (a) C'est une application de la formule des probabilités totales (ou si vous préférez, on fait un petit arbre) : la probabilité demandée vaut $\frac{60}{100}\times\frac{1}{5}+\frac{40}{100}\times\frac{1}{10}=\frac{12}{100}+\frac{4}{100}=\frac{16}{100}$.

   (b) Notons R l'évènement « Le colis arrive en retard ». On vient de voir que $P(R)=\frac{16}{100}$. De plus, $P_A(R)=\frac{1}{10}$, et $P(A)=\frac{4}{10}$. Par la formule de Bayes, $P_R(A)=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{1}{10}}{\frac{16}{100}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

2. (a) Puisqu'un colis a quatre chances sur cinq d'arriver à l'heure, pour trois jours de suite, la probabilité de n'avoir aucun retard vaut $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$ (un peu plus d'une chance sur deux).

   (b) Pour trois colis en retard, facile, ça vaut $\frac{1}{125}$. Pour un colis en retard, il ne faut pas oublier le choix du jour du retard, ce qui donne $3\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$. De même, pour deux jours de retard, la probabilité vaut $\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$. On peut vérifier que la somme des quatre dernières probabilités calculées vaut 1, ce qui est rassurant.

   (c) Pour avoir moins de 15 euros de facture, il faut qu'il y ait eu au moins deux retards, soit une probabilité de $\frac{12}{125}+\frac{1}{125}=\frac{13}{125}$ (à peine plus d'une chance sur 10).

3. (a) Puisque c'est la société A qui livre au jour 0, le colis a une chance sur 10 d'être en retard (auquel cas on passera à B), et on a donc $u_1=\frac{9}{10}$.

   (b) Déterminons plutôt la probabilité de l'événement contraire : on ne fera appel à la société B pour les jours 1 à 5 si les cinq premiers colis livrés par A (ceux des jours 0 à 4) arrivent à l'heure, soit une probabilité de $\left(\frac{9}{10}\right)^5=\frac{59\ 049}{100\ 000}$ (valeur non attendue, évidemment). La probabilité qu'on utilise B avant le jour 5 vaut donc $1-\left(\frac{9}{10}\right)^5$.

   (c) C'est une application de la formule des probabilités totales. Si on note A_n et B_n les évènements correspondant aux livraisons par A et B au jour n, on a $P_{A_n}(A_{n+1})=\frac{9}{10}$ (il faut que le colis soit à l'heure) et $P_{B_n}(A_{n+1})=\frac{1}{5}$ (il faut que le colis soit en retard pour changer de livreur) donc $P(A_{n+1})=\frac{9}{10}P(A_n)+\frac{1}{5}(1-P(A_n))$, soit $u_{n+1}=\frac{9}{10}u_n+\frac{1}{5}(1-u_n)=\frac{7}{10}u_n+\frac{2}{10}$.

   (d) On reconnait bien sûr une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x=\frac{7}{10}x+\frac{2}{10}$ donne $x=\frac{2}{3}$. On pose donc $v_n=u_n-\frac{2}{3}$, et $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{7}{10}u_n+\frac{2}{10}-\frac{2}{3}=\frac{7}{10}u_n-\frac{14}{30}=\frac{7}{10}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)$. Comme $v_0=u_0-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, on a $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}\right)^n$, puis $u_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}\right)^n$. La limite de la suite vaut $\frac{2}{3}$ (ce qui est cohérent car les colis livrés par A sont deux fois moins souvent en retard que ceux de B).

FIN FIN