My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Lundi 18 Avril 2016

1/4 de DS 9

Sysèmes Linéaires & Probas (VAR)

Durée : 1 heure

Calculatrice Autorisée

Bernouilli Family

Famille italienne emmigrée en Suisse. Elle s'est illustrée dans les mathématiques et la physique. Issue de Nicolas Bernoulli (1623-1708). Ses descendants les plus connus sont les frères Jacques (1654-1705) (voir photo) et Jean (1667-1748), on leur doit beaucoup de travaux au niveau des probablilités, des équations différentielles, de l'optique, ... Hans (1876-1959) est un architecte célèbre.

Exercice 1 : Ecricome 2011

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels : les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.

Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les événements suivants :

- E : « un appel concerne le petit électroménager ».
- A : « un appel concerne les appareils audio-vidéo »
- T : « le problème posé se résout directement par téléphone »

De plus des études ont permis d'établir les résultats suivants :
(H_1) Le standard reçoit 20 % d'appels concernant le petit électroménager et 80 % d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,5$.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio-vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,375$.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).
   (b) Montrer que $P(T) = 0,4$.
   (c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone, calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.

2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant du petit électroménager.
   (a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.
3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.
   (a) Donner la loi de Y.

Exercice 2

On s'intéresse, dans cet exercice, à la masse des pots de confitures produits dans une usine. On considère l'événement : « un pot a une masse inférieure à 490 grammes ». Une étude a permis d'admettre que la probabilité de cet événement est $0,2$.

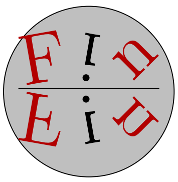
1. **On prélève au hasard 20 pots dans la production totale.**
On suppose que le nombre de pots est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pots avec indépendance.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 20 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.
   (a) **expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.**
   (b) **calculer la probabilité de l'événement A « parmi les 20 pots, il y a exactement 2 pots de masse inférieure à 490 grammes ».**
   (c) **calculer la probabilité qu'il y ait entre 1 et 3 pots de masses inférieures à 490 grammes.**
   (d) **calculer la probabilité qu'il y ait au moins un pot de masse inférieure à 490 grammes.**

2. **Combien de pots faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot dont la masse est inférieure à 490 grammes soit d'au moins 99% ?**

Exercice 3

À quelle condition sur les paramètres a, b, c, le système suivant admet-il au moins une solution ?

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c \end{array}\right.$$



Corrigé

Exercice 1

1. (a) $P(E) = 0,2; \quad P(A) = 0,8; \quad P_E(T) = 0,5; P_A(T) = 0,375.$
   (b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{E, A\}$:
   $$P(T) = P_E(T)P(E) + P_A(T)P(A) = 0,4.$$
   (c) On utilise la formule de Bayes :
   $$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E)\,P_E(T)}{P(T)} = 0,25.$$
2. (a) X représente le nombre de succès (un appel concerne du petit électro ménager) dans une série de 10 épreuves identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,2$ c'est-à-dire
   $$X(\Omega) = \{0, 1, .., 10\} \text{ et } \forall k \in \{0, .., 10\}, \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,2)^k (0,8)^{10-k}.$$
   (b) D'après le cours on peut affirmer que
   $$E(X) = np = 10 * 0,2 = 2, \quad V(X) = np(1-p) = 2 * 0,8 = 1,6.$$
3. (a) Comme précédemment, on peut écrire que Y suit la loi $\mathcal{B}(600; 0,4)$

Exercice 2

1.(a) $\left\{\begin{array}{l} \bullet \textbf{ on répète } 20 \textbf{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \textbf{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \textbf{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \textbf{succès : de probabilité } 0,2 \\ \textbf{échec : } q = 1-0,2 = 0,8 \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 20, p = 0,2)$

avec : $\left\{\begin{array}{l} \textbf{les valeurs possibles de } X \textbf{ sont } \{0,1,2,...,20\} \\ \textbf{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{20}^{k} \times 0,2^{k} \times 0,8^{20-k}} \end{array}\right.$

(b) $p(X = 2) = C_{20}^{2} \times 0,2^{2} \times 0,8^{20-2} \simeq \boxed{0,137}$

(c) $p(1 \leq X \leq 3) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) \simeq 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 \simeq \boxed{0,3999}$

(d) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_{20}^{0} \times 0,2^{0} \times 0,8^{20-0} = 1 - 0,8^{20} \simeq \boxed{0,988}$

2. on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - 0,8^{n}$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,8^{n} \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq 0,8^{n}$

$0,01 \geq 0,8^{n}$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \leq n$

$n \geq 20,63$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins } 21}$