Corrigé CNAEM 2017

EX ①

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} ; & x>0 \\ 0 & si\ x\leq 0 \end{cases}$$

1) On a X suit la loi exponentielle de paramètre λ donc

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var X = \frac{1}{\lambda^2}$$

2) Fonction de répartition de X

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} ; & x\geq 0 \\ 0 & si\ x<0 \end{cases}$$

3) Montrons que $P(Y\leq 0)=0$

On a : $P(Y\leq 0) = P(\lfloor X\rfloor+1\leq 0)$ ~~$= P(\lfloor X\rfloor \leq -1)$~~

car $\lfloor X\rfloor+1\geq X$

$$= P(X\leq 0)$$

$$= F(0) = 0$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$

on a : $p(Y=k) = p(\lfloor X\rfloor+1=k)$

$$= p(\lfloor X\rfloor = k-1)$$

⚠ $\lfloor X\rfloor = p \Leftrightarrow p\leq X<p+1$

$$= P(k-1\leq X<k)$$

$$= F_X(k)-F_X(k-1)$$

$$= \left(1-e^{-\lambda k}\right)-\left(1-e^{-\lambda(k-1)}\right)$$

$$= e^{-\lambda(k-1)}-e^{-\lambda k}$$

$$= e^{-\lambda(k-1)}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

d'où $\boxed{p(Y=k) = \left(1-e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}}$

Si on pose : $p = 1-e^{-\lambda}$

on a : $p(Y=k) = (1-p)^{k-1}\times p$

donc Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1-e^{-\lambda}$.

4) $Z = Max(X_1,X_2)$ où $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

4.1. Montrons que : $(Z\leq x) = (X_1\leq x)\cap(X_2\leq x)$

On a : $w\in(Z\leq x) \Leftrightarrow Z(w)\leq x$

$\Leftrightarrow Max(X_1(w), X_2(w))\leq x$

$\Leftrightarrow X_1(w)\leq x$ et $X_2(w)\leq x$

$\Leftrightarrow w\in(X_1\leq x)$ et $w\in(X_2\leq x)$

$\Leftrightarrow w\in(X_1\leq x)\cap(X_2\leq x)$

d'où $(Z\leq x) = (X_1\leq x)\cap(X_2\leq x)$

4-2 ; $F_Z(x) = P(Z\leq x)$

$= P((X_1\leq x)\cap(X_2\leq x))$ — X_1 et X_2 sont indépendants

$= p(X_1\leq x)\times p(X_2\leq x)$

$$= \left(F_{X_1}(x)\right)^2 = \begin{cases} \left(1-e^{-x}\right)^2 ; & x\geq 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & si\ x\geq 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

4-3. ~~Sachant~~

on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} 2xe^{-x}-2xe^{-2x}\,dx$

$$= 2\times\frac{1}{1}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

5) on a : $Z+T = Max(X_1,X_2)+Min(X_1,X_2) = X_1+X_2$

donc $E(T) = E(X_1+X_2-Z) = E(X_1)+E(X_2)-E(Z)$

$$= 1+1-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Pour justifier l'espérance dans la question 4-3 il suffit de remarquer que $\int_0^{+\infty} 2x e^{-2x}dx$ represente l'esperance d'une v.a qui suit la loi exponentielle de parametre 2 et de meme pour $\int_0^{+\infty} xe^{-x}$

Exercice 2 :

→ Etude d'une suite récurrente :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 2(c+d)x + cd + 2(c+d)\right).$

et

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$

1- $c = d = 0$

$g(x) = \frac{3}{4}x^2$ et $\begin{cases} U_0 = \lambda \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n^2 \end{cases}$

1.1- Si $\lambda = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 0$. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle

Dém : ✓ $U_0 = 0$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = 0$ et montrons que $U_{n+1} = 0$

On a $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n^2 = \frac{3}{4} \times 0^2 = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 0$.

1.2- Montrons que $\forall n \geq 1 ; U_n > 0$

✓ On a $U_1 = \frac{3}{4}U_0^2 = \frac{3}{4}\lambda^2 > 0$

✓ soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n > 0$

On a : $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n^2 > 0$

donc $\forall n \geq 1 : U_n > 0$.

1.3- $W_n = \ln(U_n)$;

$W_{n+1} = \ln(U_{n+1})$

$= \ln\left(\frac{3}{4}U_n^2\right)$

$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(U_n^2)$

$= 2\ln(U_n) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$\boxed{W_{n+1} = 2W_n + \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

$U_{n+1} = aU_n + b$

$V_n = U_n - \frac{b}{1-a}$

$\downarrow$

$V_{n+1} = aV_n$

$V_n = a^{n-p} \cdot V_p$

$V_n \rightarrow U_n.$

Posons $V_n = W_n + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

On a $V_{n+1} = W_{n+1} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$= 2W_n + 2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$= 2\left(W_n + 2\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

$= 2V_n$.

donc (V_n) est géométrique de raison $q=2$

$V_n = 2^{n-1} V_1$

$W_n + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \left(W_1 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) 2^{n-1}$

$$\boxed{W_n = \left(\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right)\right) 2^{n-1} - \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

1.4- On a $\ln(U_n) = W_n$ donc $U_n = e^{W_n}$

d'où $U_n = e^{\ln\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 2^{n-1} - \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

$$\boxed{U_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^{2^n}}$$

1.5- Si $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| < 1$ (c-à-d $|\lambda| < \frac{4}{3}$) alors $\lim U_n = 0$

Si $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| = 1$ (c-à-d $|\lambda| = \frac{4}{3}$) donc $U_n = \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{4}{3}$

Si $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| > 1$ (c-à-d $|\lambda| > \frac{4}{3}$) $\lim U_n = +\infty$

$$\lim q^{(n)} = \begin{cases} = 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

2- $c = d = 2$ $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12) * \\ U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}(3U_n^2 - 8U_n + 12) * \end{cases}$

2.1- Supposons que (U_n) CV et posons $\lim U_n = \ell$

donc $\lim U_{n+1} = \ell$

donc par passage à la limite dans $*$, on a

$\ell = \frac{1}{4}(3\ell^3 - 8\ell + 12)$.

c-à-d $4\ell = 3\ell^2 - 8\ell + 12$

" $3\ell^2 - 12\ell - 12 = 0$

" $3(\ell - 2)^2 = 0$

" $\ell = 2$

2.2- Mq si $\lambda > 2$ alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↗ et diver

On a $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}(3U_n^2 - 8U_n + 12) - U_n$

$$= \frac{3U_n^2 - 12U_n + 12}{4}$$

$$= \frac{3(U_n^2 - 4U_n + 4)}{4}$$

$$= \frac{3(U_n - 2)^2}{4}$$

donc U_n est croissante

$n \geq 0 \Rightarrow U_n \geq U_0$

$\Rightarrow U_n \geq \lambda > 2$

$\Rightarrow U_n - 2 > 0$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n > 0$

c-à-d (U_n) est strictement croissante.

Mq $\lim U_n = +\infty$

On a (U_n) est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone soit $\lim U_n = +\infty$ soit $(U_n)_n$ converge si $\lim U_n \neq +\infty$, c-à-d (U_n) converge vers 2

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n \geq \lambda > 2$

d'où $\lim U_n \geq \lambda > 2$

c-à-d $2 \geq \lambda > 2$ absurde

donc $\lim U_n = +\infty$

2.3- On a $U_1 = 2 \iff \frac{1}{4}(3U_0^2 - 8U_0 + 12) = 2$

$\iff 3\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 8$

$\iff 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

$\iff (\lambda - 2)(3\lambda - 2) = 0$

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda = 2/3$

si on pose $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = 2$ on a $U_n = 2 \iff \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

2.4 - On a $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv?

Montrons que

✓ On a $U_0 = \lambda < 2$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{2}{3} < U_n < 2$ et mq $\frac{2}{3} < U_{n+1} < 2$

On a $U_{n+1} - 2 = \dfrac{3U_n^2 - 8U_n + 4}{4}$

$= \dfrac{3(U_n - 2)(U_n - \frac{2}{3})}{4}$

$U_{n+1} - 2 = \dfrac{3(U_n - 2)(U_n - 2/3)}{4}$

On a $\frac{2}{3} < U_n < 2$ donc $U_n - 2 < 0$, $U_n - \frac{2}{3} > 0$ donc $U_{n+1} - 2 < 0$

c-à-d $U_{n+1} < 2$

On montre de m̂ que $U_{n+1} > \frac{2}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{2}{3} < U_n < 2$

c/c: (U_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers 2 (question 2.1).

2.5 - Supposons que $\lambda < \frac{2}{3}$

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < \frac{2}{3}$ (à effectuer)

Par passage à la limite on a $2 < \frac{2}{3}$ absurde

donc $\lim U_n = +\infty$

4-

4.1- $P(c) = 3c^2 - 2(2+c+d)c + cd + 2(c+d)$

$= 3c^2 - (4 - 2c - 2d)c + cd + 2c + 2d$

$= 3c^2 - 4c - 2c^2 - 2dc + cd + 2c + 2d$

$= c^2 - dc - 2c + 2d$

$= (c-d)(c-2) \geq 0$

$P(d) = d^2 - 2d - cd + 2c$

$= (d-c)(d-2) \leq 0$

$P(2) = 4 - 2c - 2d + cd$

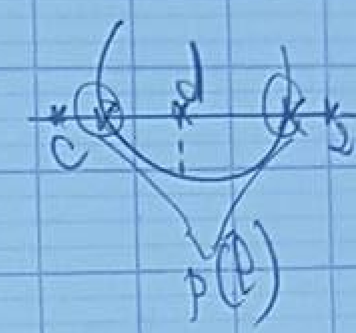
$= \underset{<0}{(c-2)}\underset{\leq 0}{(d-2)} > 0$.

1.2 - $U_{n+1} = \frac{1}{4}P(U_n) + U_n$

Par passage à la limite :

$\ell = \frac{1}{4}P(\ell) + \ell$

$P(\ell) = 0$



ℓ est une racine de P

On a $P(c) > 0$

$p(d) < 0$ et $P(\ell) = 0$

$p(2) > 2$

donc $c < \ell < d$ ou $d < \ell < 2$ d'après TVI

Problème :

2ème partie

2.1: 2.1.1-

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc $AV_1 = 1V_1$

donc V_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $AV_2 = -\frac{1}{2}V_2$

donc V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

2.1.2- $SpA = \{1, -\frac{1}{2}\}$

2.2: $PQ = I$

2.2.2:

On a $PQ = QP = I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

2.3

23.1- $PT = AP$ (calcul à faire).

2.3.2- On a $AP = PT$

donc $APP^{-1} = PTP^{-1}$

d'où $A = PTP^{-1}$

Mq $\forall k \geq 1$ $\quad A^k = PT^kP^{-1}$

On a $A^1 = PT^1P^{-1}$

✓ donc l'égalité $A^k = PT^kP^{-1}$ est vraie pour $k = 1$

✓ Soit $k \geq 1$ supposons que $A^k = PT^kP^{-1}$

_ On a $A^{k+1} = A \times A^k$

$$= PTP^{-1} \times PT^kP^{-1}$$

$$= PT \times I_3 \times T^kP^{-1}$$

$$= PT^{k+1}P^{-1}$$

donc $\forall k \geq 1$, $A^k = P \times T^k \times P^{-1}$

2.4

24.1- Mq $\forall k \geq 1$ $\quad T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^k & k\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$

. pour $k = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^1 & 1\left(\frac{-1}{2}\right)^1 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = T.$$

Donc la probabilité est vraie pour $k = 1$

. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Supposons que: $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^k & k\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$

et montrons que

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} & (k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{pmatrix}$$

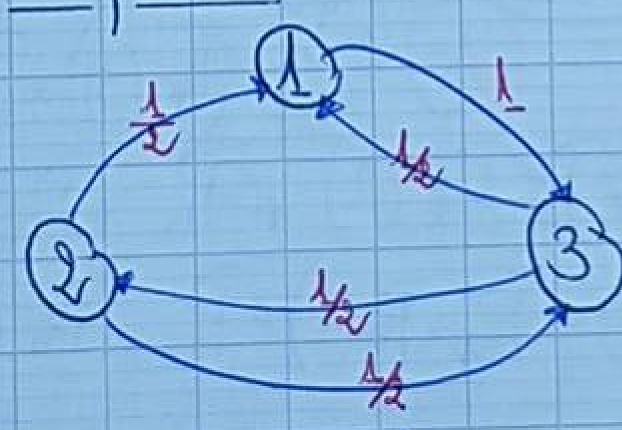
donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$

$$A^k = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 6k\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 10\left(-\frac{1}{2}\right)^k + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k & \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 6\left(-\frac{1}{2}\right)^k & -3\left(-\frac{1}{2}\right)^k & -3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 2+(-2+6k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2+(7-3k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2-(2+3k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 4+(12-18k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4+(-24+9k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4+(3+9k)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

* $3^{\text{ème}}$ partie :



* On note X_n la v.a. réelle égale au sommet occupé par l'internaute à l'instant n.

$\rightarrow$ $P_n(j) = P(Y_n = j)$

$\rightarrow$ $P_{i,j} = P_{(Y_n = j)}(Y_{n+1} = i)$

$\rightarrow$ $A_n(j) = (X_n = j)$.

3.1-

$$B = (P_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$ matrice de transition

$$= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

3.2-

$j \in \{1, 2, 3\}$

$P_{1j} + P_{2j} + P_{3j} = 1$

$j = 1 \quad P_{11} + P_{21} + P_{31} = 1$

$j = 2 \quad P_{12} + P_{22} + P_{32} = 1$

$j = 3 \quad P_{13} + P_{23} + P_{33} = 1$

3.3- On a $(A_n(1), A_n(2), A_n(3))$ forme un SCE donc d'après la formule de probabilité totale

La prob de l'ente d'être a 1 l'instant $n+1$ $P_{n+1}(1)$

On a $P_{n+1}(1) = P(A_n(1)) \times P_{11} + P(A_n(2)) \times P_{12} + P(A_n(3)) \times P_{13}$

donc $* P_{n+1}(1) = P_{11} \times P_n(1) + P_{12} \times P_n(2) + P_{13} \times P_n(3)$;

3.4- $* P_{n+1}(2) = P_{21} \times P_n(1) + P_{22} \times P_n(2) + P_{23} P_n(3)$;

$* P_{n+1}(3) = P_{31} P_n(1) + P_{32} P_n(2) + P_{33} P_n(3)$.

3.5-

3.5.1-

On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{n+1}(1) \\ P_{n+1}(2) \\ P_{n+1}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} P_n(1) + P_{12} P_n(2) + P_{13} P_n(3) \\ P_{21} P_n(1) + P_{22} P_n(2) + P_{23} P_n(3) \\ P_{31} P_n(1) + P_{32} P_n(2) + P_{33} P_n(3) \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n(1) \\ P_n(2) \\ P_n(3) \end{pmatrix}$$
$$= B X_n$$
$$= A X_n$$

3.5.2- $X_n = A^n X_0$ (à vérifier)

3.5.3-

$$X_n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^k & \times & \times \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(1) \\ P_0(2) \\ P_0(3) \end{pmatrix}$$

$$P_n(1) = \frac{1}{9}\left[3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^k P_0(1) + \left(3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right) P_0(2) + \left(3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right) P_0(3)\right]$$

$$P_n(2) = \frac{1}{9}\left[- - - - \right]$$

$$P_n(3) = \frac{1}{9}\left[- - - - \right]$$

3.6-

36.1- $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^k \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ par croissance composée.

fort

faible, $(\ln(n))^a$, n^k, a^n, $n!$

fort

- Autre méthode

$$\sum U_n \text{ cv} \underset{n \to 1}{\Longrightarrow} \lim U_n = 0$$

$$\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{-1}{2}\right) \text{ converge.}$$

donc $\lim_{\to +\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$

36.2-

$$P_0(1) + P_0(2) + P_0(3) = 1$$

car $(A_0(1), A_0(2), A_0(3))$ est un SCE donc $p(A_0(1)) + p(A_0(2)) + p(A_0(3)) = 1$

$$\lim_{\to +\infty} P_n(1) = \frac{1}{9}\left(3P_0(1) + 3P_0(2) + 3P_0(3)\right)$$
$$= \frac{3}{9}\left(P_0(1) + P_0(2) + P_0(3)\right)$$
$$= \frac{3}{9}.$$

* $\lim P_n(2) = \frac{2}{9}$, $\lim P_n(3) = \frac{4}{9}$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ est vecteur propre de A.

$$A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} A v_1 = \frac{1}{9} v_1 = 1\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$