Exercice 1 :

CNAEM 2019

1- a- $$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b- $$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ | $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ | $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ | $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

Donc : $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verification : $PP^{-1} = I$

c- $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

D'où $AP = PD$

d- Puisque $AP = PD$ (d'après la question précédente), donc $A = PDP^{-1}$

D'où A est diagonalisable

2- On étudie les produits Au, Av et Aw :

$Au = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Au = -1\,u$

Donc u est un vecteur propre de la matrice A et sa valeur propre est -1.

$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = 1\,v$

Donc v est un vecteur propre de la matrice A et sa valeur propre est 1

$$Aw = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Aw = 2w$$

Donc w est un vecteur propre de la matrice A et sa valeur propre est 2.

3- a- $\forall n \in \mathbb{N}$, On mq : $A^n = PD^nP^{-1}$

Initiation :

Pour $n=0$,
$$A^0 = PD^0P^{-1}$$
$$A^0 = PIP^{-1}$$
$$A^0 = PP^{-1} = I \quad (\text{vrai})$$

Héridité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$, et démontrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

On a :
$$A^{n+1} = A^n \times A$$
$$A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD^nIDP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Conclusion : D'après l'HR, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

b- On calcule D^2, D^3 et D^4

$$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Donc D^n est une matrice diagonale, et

$$D^n = \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Démonstration par l'hypothèse de récurrence :

Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $D^0 = I$ (vrai)

$$D^0 = \begin{pmatrix} -1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Hérédité :

$\forall n \in \mathbb{N}$ fixé qq, on suppose que $D^n = \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$,
et on démontre que $D^{n+1} = \begin{pmatrix} -1^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

On a : $D^{n+1} = D^n \times D$

$$= \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : D'après l'hypothèse de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c- On a d'après la question (a) : $A^n = P D^n P^{-1}$

D'après les question précédentes on a :

b- D'après la question précédente, On a : $U_n = A^n . U_0$,
et d'après l'énoncé : $U_n = \begin{pmatrix} a^n \\ b^n \\ c^n \end{pmatrix}$; $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et $A^n = \begin{pmatrix} -1^{n+2} & 0 & 0 \\ & 1^{n+2} & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2} - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

On calcule alors : $U_n = A^n . U_0$

$$A^n . U_0 = \begin{pmatrix} -1^{n+2} & 0 & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2} & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2} - 2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} 1^{n+3} \\ 2^{n+2} + 1^{n+3} \\ 2^{n+2} + 1^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n \\ b^n \\ c^n \end{pmatrix}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $a^n = 1^{n+3}$

$b^n = 2^{n+2} + 1^{n+3}$

$c^n = 2^{n+2} + 1^{n+2}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; D^n = \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} ; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule : $A^n = PD^n P^{-1}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1^{n+1} & 0 & 0 \\ -1^{n+1} & 1^{n+1} & 0 \\ -1^{n+1} & 1^{n+1} & 2^n \end{pmatrix}$$

$$PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -1^{n+1} & 0 & 0 \\ -1^{n+1} & 1^{n+1} & 0 \\ -1^{n+1} & 1^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1^{n+2} & 0 & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2} & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2}-2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Donc $A^n = \begin{pmatrix} -1^{n+2} & 0 & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2} & 0 \\ -2^{n+2} & 1^{n+2}-2^n & 2^n \end{pmatrix}$

4-a- On montre que : $U_n = A^n U_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $U_0 = A^0 U_0$

$U_0 = I\, U_0 = U_0 \rightarrow$ (vrai)

Hérédité :

$\forall n \in \mathbb{N}$ fixé qq, on suppose que $U_n = A^n U_0$, et on démontre que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.

On a : $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$

(D'après l'énoncé) $A\, U_n = A^n . A . U_0$

$U_n = A^n . U_0$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, D'après l'HR, $U_n = A^n . U_0$

Partie II :

1- On a : $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$

et d'après la 1ère partie : $A = PDP^{-1}$

Donc : $M^3 = A \iff (PNP^{-1})^3 = PDP^{-1}$

$M^3 = A \iff PN^3P^{-1} = PDP^{-1}$

$M^3 = A \iff N^3 = D$

D'où $M^3 = A$ ssi $N^3 = D$

2- On a : $N^3 = D$ (d'après la question précédente)

Donc $N^3 = D \implies N^3N = DN = N^4$

$NN^3 = ND = N^4$

D'où $DN = ND$

3- On a d'après la 1ère partie D est une matrice diagonale, et puisque $D = N^3$ donc la matrice N^3 est diagonale.
On sait déjà que la puissance d'une matrice diagonale est la puissance des éléments diagonaux de la matrice, d'où N est une matrice diagonale.

4- On a : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d'après la 1ère partie)

On pose : $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow N^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$N^3 = D \iff \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Par passage de l'écriture au système.

$(S) \begin{cases} a^3 = -1 \\ b^3 = 1 \\ c^3 = 2 \end{cases}$

Donc $S = \{ (a^3 = -1) ; (b^3 = 1) ; (c^3 = 2) \}$

5- D'après la question 1 : $M^3 = A \iff N^3 = D$
donc la solution de l'équation (E) : $M^3 = A$ est la même que $N^3 = D$.