Concours National d'Accès aux Ecoles de Management

Edition 2018.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{2e^t}{(1+e^t)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Partie 1

Soit φ la fonction définie $\varphi(x) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère du plan.

1- Vérifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$

2- Déterminer la limite de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$

3- Montrer que pour tout réel x ; $\varphi'(x) = \dfrac{e^x}{3(1+e^x)}$

4) Donner le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$

5- Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ.

6- Déterminer pour tout x de I, $\varphi^{-1}(x)$

Partie II :

Par la suite, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega ; A ; P)$

1- Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle. Dans toute la suite de l'exercice, On note X la variable aléatoire réelle de densité f.

2- a) Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X

b- Montrer que pour tout réel x, $0 \leqslant F_X(x) < 1$

c- Déterminer $P(\ln(2) \leqslant X \leqslant \ln(3))$

3- a) Montrer que pour tout réel A strictement positif

$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\, dt = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$$

b) Montrer que pour tout réel A strictement positif.

$$\int_0^A t\, f(t)\, dt = \frac{-2A}{1+e^A} + 2\ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$$

c) Vérifier que $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{A}{1+e^A} = 0$

d) En déduire que X admet une espérence et donner sa valeur $E(X)$

4- On considère la variable aléatoire réelle Y définie par $Y = \varphi(X)$

a) Montrer que $P\left(Y \leqslant \frac{-\ln(2)}{3}\right) = 0$

b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y

c) Déterminer le réel α tel que $F_Y(\alpha) = \frac{1}{2}$

5) Soient X_1 et X_2 deux variable aléatoires réelles independantes et de même loi que X.

On pose $Z_1 = \sup(X_1, X_2)$; $Z_2 = \sup(\varphi(X_1), \varphi(X_2))$

$$Z_3 = \varphi(Z_1) \quad \text{et} \quad Z_4 = \inf(X_1 ; X_2)$$

a) Déterminer les fonctions de répartitions F_{Z_1} ; F_{Z_2} et F_{Z_3} respectivement des variables aléatoires Z_1, Z_2 et Z_3

b) i) Déterminer $E(Z_1 + Z_4)$, l'espérance de la variable aléatoire $Z_1 + Z_4$

ii) Déterminer $\vartheta(Z_1 + Z_4)$, la variance de la variable aléatoire $Z_1 + Z_4$, en fonction de $\vartheta(X)$

iii) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_4} de la variable aléatoire Z_4.

Exercice 2

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel t

$$g_n(t) = \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)} \quad \text{et} \quad h_n(t) = \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)^2}$$

On considère les deux suites $(I_n)_{n\geq 0}$ et $(J_n)_{n\geq 0}$ qui sont définies par $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$.

1) a) Vérifier que pour tout entier naturel n et pour tout réel x

$0 < g_n(x) < e^{-nx}$ et $0 < h_n(x) < e^{-nx}$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, I_n et J_n sont deux intégrales convergentes.

c) Déterminer les valeurs de $\lim\limits_{+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

d) i) Déterminer la valeur de I_0 (Vous pouvez utiliser le résultat suivant sans le démontrer : pour tout réel A strictement positif, $\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$)

ii) Déterminer les deux valeurs réels a et b tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{(1+e^t)^2} = \frac{a}{1+e^t} + \frac{be^t}{(1+e^t)^2}$$

iii) En déduire la valeur de J_0.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n

b) En utilisant la formule trouvée dans la question 2.a) commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n, pour une valeur de l'entier naturel non nul n.

```
n = input ('Donner une valeur de l'entier naturel non nul n: ")
I =
for k =
   I =
end
disp(..., 'La valeur de I st: ")
```

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ st décroissante

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n$

e) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} I_n$. On pourra utiliser le fait que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ st divergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

3) a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, $J_{k-1} + J_k$ en fonction de I_k

b) Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche la valeur de l'integrale J_n, l'entier naturel non nul n étant donné par l'utilisateur.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = J_0 + (-1)^{n+1} J_n$$

d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n$ est convergente et déterminer sa somme.

e) Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$. l'entier naturel non nul n étant donné par l'utilisateur.

Exercice 3 :

On considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $Vect(u, v)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

Partie I :

1) a) Vérifier que $PQ = 3I$

b) En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}

2) On pose $F = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\}$ et $f_1 = (1 ; 1 ; 1)$

a) Déterminer deux vecteurs f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = Vect(f_2 ; f_3)$ avec $f_2 = (1 ; a ; b)$ et $f_3 = (c ; 1 ; d)$ où $a ; b ; c$ et d sont à determiner.

b) Montrer que la famille $(f_1 ; f_2 ; f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) a) Vérifier que $A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = O$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle.

b) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}

c) Déterminer le polynôme annulateur de A de la forme $P = X^2 + \gamma X + \delta$ où γ et δ sont deux réels à déterminer.

d) Déterminer les valeurs propres éventuelles de A notées α et β avec $\alpha > \beta$.

e) Vérifier que $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$

et $A\begin{pmatrix}c\\1\\d\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}c\\1\\d\end{pmatrix}$

f) Qu'est ce que vous pouvez conclure pour α et β ? justifier votre réponse.

4) a) Vérifier que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$

α et β sont les deux valeurs qui sont déterminés dans la question Partie I, 3,d)

b) Montrer que pour tout entier naturel n ; $A^n = PD^nP^{-1}$

5) Montrer que pour tout entier naturel n ;

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie II : Application en probabilité :

On considère trois positions A, B, C distinctes deux à deux se trouvant sur un cercle. Un mobile se deplace entre les positions A, B et C de la façon suivante, pour tout entier naturel n.

- Si à l'instant n, il est à l'une de trois positions, alors à l'instant n+1, soit il reste avec une probabilité de $\frac{3}{5}$, soit il se déplace vers l'une des deux autres positions d'une façon équiprobable (c'est à dire avec la même probabilité)

On note les événements :

- A_n " le mobile se trouve à la position A à l'instant n".
- B_n " le mobile se trouve à la position B à l'instant n".
- C_n " le mobile se trouve à la position C à l'instant n".

On pose $P(A_n) = a_n$ la probabilité de l'événement A_n. $P(B_n) = b_n$ la probabilité de l'evenement B_n. et $P(C_n) = c_n$ la probabilité de l'événement C_n.

Initialement, à l'instant $n=0$, le mobile se trouve dans une des trois positions avec $a_0 = \frac{1}{2}$; $b_0 = \frac{1}{3}$ et $c_n = \frac{1}{6}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{5} a_n + \frac{1}{5} b_n + \frac{1}{5} c_n$

b) Exprimer que pour tout entier naturel n, b_{n+1} en fonction de a_n ; b_n et c_n

c) Exprimer que pour tout entier naturel n, c_{n+1} en fonction de a_n ; b_n ; c_n

2) Exprimer pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

3) Recopier et compléter le programme Scilab avant afin qu'il calcul et affiche les valeurs a_{15} ; b_{15} et c_{15}.

```
A = . . . . . .
U = . . . . . .
for i = . . . .
  U = . . . .
end
disp( . . . . )
```

4) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n en fonction de n.

5) En déduire les valeurs de $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$; et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$

Exercice 4 :

Une entreprise de construction des ampoules utilise deux machines A et B distinctent qui fonctionnent indépendemment l'une à l'autre. On suppose que A produit 40% des ampoules et B produits 60% des ampoules. La probabilités pour qu'une ampoule construite par la machine A soit défectueuse est 0,05. alors que la probabilité pour qu'une ampoul construite par B soit défectueuse est 0,1. On note l'événement D : "L'ampoule est defectueuse" et P(D) est la probabilité de l'evenement D.

1) a) Déterminer P(D)

b) Détermine $P(D \cap A)$, la probabilité de l'evenement $D \cap A$.

Scanned with CamScanner

c) On choisis au hasard une ampoule à la sortie de l'entreprise On constate que cette ampoule st défectueuse. Calculer la probabilité de l'evenement "l'ampoule provient de la machine A"

2) On suppose de plus que le nombre des ampoules produites en une heure par A st une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$. On considère la variable aléatoire Y representant le nombre des ampoules deffectueuses produites par la machine A en une heure.

a) Pour tout entier naturel k, exprimer $P(X=k)$ en fonction de k, puis déterminer la valeur de l'esperence $E(X)$ de X la valeur de la variance $V(X)$ de X.

b) Soient k et n deux entiers naturels. Déterminer la probabilité $P(Y=k \mid X=n)$, (la probabilités de l'évenement $(Y=k)$ sachant l'evenement $(X=n)$), dans le cas suivants:

i) $k > n$

ii) $k \leq n$

c) En déduire, en utilisant le système complet d'évenement $(X=j)_{j\in\mathbb{N}}$ que Y suit la loi de Poisson de paramètre β à préciser.

d) Ecrire un programme Scilab, en utilisant la fonction grand, qui renvoie une matrice à une ligne et 1000 colones, qui simule la variable aléatoire Y.