Surfaces: Etude locale

Mohamed Boucetta
boucetta@fstg-marrakech.ac.ma

Université Cadi-Ayyad
Faculté des sciences et Techniques Marrakech

Journée Tipe
Lycée My Youssef Rabat
06 Mars 2010

Définition.

Un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ est une surface lisse s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes : Pour tout point $P \in \mathcal{S}$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, un ouvert W de $\mathbb{R}^3$ contenant P et une application lisse $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$(u,v) \longrightarrow (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$ tels que :

1. *$\sigma(U) = \mathcal{S} \cap W$ et $\sigma : U \longrightarrow \mathcal{S} \cap W$ est un homéomorphisme ;*
2. *les deux vecteurs*

$$\sigma_u := \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}\right) \quad \text{et} \quad \sigma_v := \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}\right)$$

sont linéairement indépendants en tout point (u,v) de U.

Une application $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$(u, v) \longrightarrow (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v))$ qui vérifie les conditions de Définition 1.1 1. est appelée *paramétrisation régulière* de $\mathcal{S}$. Un atlas de $\mathcal{S}$ est une famille de paramétrisations régulières dont les images recouvrent $\mathcal{S}$.

Une application $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$(u, v) \longrightarrow (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v))$ qui vérifie les conditions de Définition 1.1 1. est appelée *paramétrisation régulière* de $\mathcal{S}$. Un atlas de $\mathcal{S}$ est une famille de paramétrisations régulières dont les images recouvrent $\mathcal{S}$. Noter que les deux vecteurs σ_u et σ_v sont linéairement indépendants si et seulement si le vecteur $\sigma_u \times \sigma_v$ est non nul en tout point $(u, v) \in U$. On appelle alors *champ de vecteur normale* de $\mathcal{S}$ le champ de vecteur (dépendant de σ) et défini sur $\sigma(U)$ par

$$\mathbf{N}_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{||\sigma_u \times \sigma_v||}. \tag{1}$$

Si $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\widetilde{\sigma} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrisations régulières de $\mathcal{S}$ telles que $V := \sigma(U) \cap \widetilde{\sigma}(\widetilde{U}) \neq \emptyset$ alors il existe un difféomorphisme $\phi : \sigma^{-1}(V) \longrightarrow \widetilde{\sigma}^{-1}(V)$, $(u, v) \mapsto (\widetilde{u}, \widetilde{v})$, appelé *changement de paramétrisation*, tel que

$$\sigma(u, v) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \quad \text{pour tout} \quad (u, v) \in \sigma^{-1}(V). \tag{2}$$

Si $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\widetilde{\sigma} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrisations régulières de $\mathcal{S}$ telles que $V := \sigma(U) \cap \widetilde{\sigma}(\widetilde{U}) \neq \emptyset$ alors il existe un difféomorphisme $\phi : \sigma^{-1}(V) \longrightarrow \widetilde{\sigma}^{-1}(V)$, $(u, v) \mapsto (\widetilde{u}, \widetilde{v})$, appelé *changement de paramétrisation*, tel que

$$\sigma(u, v) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \quad \text{pour tout} \quad (u, v) \in \sigma^{-1}(V). \tag{2}$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} \right) \widetilde{\sigma}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{\sigma}_{\widetilde{v}} = J(\phi) \widetilde{\sigma}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{\sigma}_{\widetilde{v}}, \tag{3}$$

où $J(\phi)$ est le Jacobien de ϕ,

$$J(\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\widetilde{\sigma} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrisations régulières de $\mathcal{S}$ telles que $V := \sigma(U) \cap \widetilde{\sigma}(\widetilde{U}) \neq \emptyset$ alors il existe un difféomorphisme $\phi : \sigma^{-1}(V) \longrightarrow \widetilde{\sigma}^{-1}(V)$, $(u, v) \mapsto (\widetilde{u}, \widetilde{v})$, appelé *changement de paramétrisation*, tel que

$$\sigma(u, v) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \quad \text{pour tout} \quad (u, v) \in \sigma^{-1}(V). \tag{2}$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} \right) \widetilde{\sigma}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{\sigma}_{\widetilde{v}} = J(\phi) \widetilde{\sigma}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{\sigma}_{\widetilde{v}}, \tag{3}$$

où $J(\phi)$ est le Jacobien de ϕ,

$$J(\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

De la relation (3), on déduit que

$$\mathbf{N}_\sigma = signe(J(\phi)) \mathbf{N}_{\widetilde{\sigma}}. \tag{4}$$

Les relations (3) montrent que le plan vectoriel engendré par σ_u et σ_v ne dépend pas de la paramétrisation et on peut poser la définition suivante.

Définition.

Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ et $P \in \mathcal{S}$. Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en P est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\sigma_u(u_0, v_0)$ et $\sigma_v(u_0, v_0)$ où σ est n'importe quelle paramétrisation régulière de $\mathcal{S}$ telle que $\sigma(u_0, v_0) = P$. On le notera $T_P\mathcal{S}$.

Exemple.

1. *Tout plan de* $\mathbb{R}^3$ *passant par un point* $\mathbf{a}$ *et de vecteurs directeurs* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$ *est une surface dont une paramétrisation globale est donnée par*

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}.$$

.

Exemple.

1. *Tout plan de* $\mathbb{R}^3$ *passant par un point* $\mathbf{a}$ *et de vecteurs directeurs* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$ *est une surface dont une paramétrisation globale est donnée par*

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}.$$

2. *La sphère*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est une surface. Une paramétrisation simple de S^2 *est donnée par la latitude* θ *et la longitude* ϕ *:*

$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ *et* $0 < \phi < 2\pi$.

Exemple.

Une surface de révolution est une surface obtenue en tournant une courbe dans un plan autour d'une droite dans le même plan.

Exemple.

Une surface de révolution est une surface obtenue en tournant une courbe dans un plan autour d'une droite dans le même plan.
Supposons, par exemple, que l'axe de rotation est l'axe des z et le plan est le plan xz.

Exemple.

Si

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$$

est une paramétrisation de la courbe profile contenant Q, P est donné par

$$\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= (\dot{f}\cos v, \dot{f}\sin v, \dot{g}),\\
\sigma_v &= (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),\\
\sigma_u \times \sigma_v &= (f\dot{g}\cos v, -f\dot{g}\sin v, f\dot{f}),\\
||\sigma_u \times \sigma_v||^2 &= f^2(\dot{f}^2 + \dot{g}^2).
\end{aligned}$$

Première forme fondamentale

Soit $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ une courbe dans une surface $\mathcal{S}$ où σ est une paramétrisation de $\mathcal{S}$. La longueur d'arc de γ à partir de $\gamma(t_0)$ est donnée par

$$s = \int_{t_0}^{t} ||\dot{\gamma}(u)|| du.$$

On a $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$, et donc

$$||\dot{\gamma}||^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

où $E = ||\sigma_u||^2$, $F = <\sigma_u, \sigma_v>$ et $G = ||\sigma_v||^2$. Donc

$$s = \int_{t_0}^{t} \left(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt. \tag{5}$$

En posant $du = \dot{u}dt$ etc, on voit que

$$s = \int \sqrt{ds^2}$$

où

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Cette quantité est appelée *première forme fondamentale de* σ.

En posant $du = \dot{u}dt$ etc, on voit que

$$s = \int \sqrt{ds^2}$$

où

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Cette quantité est appelée *première forme fondamentale de* σ.

Définition.

Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux surfaces, un difféomorphisme $f : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ est une isométrie si il préserve la longueur des courbes.

En posant $du = \dot{u}dt$ etc, on voit que

$$s = \int \sqrt{ds^2}$$

où

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Cette quantité est appelée *première forme fondamentale de* σ.

Définition.

Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux surfaces, un difféomorphisme $f : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ est une isométrie si il présèrve la longueur des courbes.

Théorème.

Un difféomorphisme $f : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ est une isométrie si et seulement si, pour tout paramétrisation σ_1 de $\mathcal{S}_1$, les premières formes fondamentales de σ_1 et $\sigma_2 := f \circ \sigma_1$ coincident.

Seconde forme fondamentale et courbure des surfaces

Seconde forme fondamentale et courbure des surfaces

Soit σ une paramétrisation d'une surface $\mathcal{S}$ de vecteur normal $\mathbf{N}_\sigma$. On appelle *seconde forme fondamentale* de σ, l'expression

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \tag{6}$$

où

$$L =< \sigma_{uu}, \mathbf{N}_\sigma >, \quad M =< \sigma_{uv}, \mathbf{N}_\sigma > \quad \text{et} \quad N =< \sigma_{vv}, \mathbf{N}_\sigma > .$$

Si $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ est une courbe unitaire dans une surface, alors $\dot{\gamma}$ est un vecteur unitaire tangent à la surface. Donc $\dot{\gamma}$ est orthogonal au vecteur normal $\mathbf{N}_\sigma$ de σ, donc $\dot{\gamma}$, $\mathbf{N}_\sigma$ et $\mathbf{N}_\sigma \times \dot{\gamma}$ est une base orthonormée. Puisque $\dot{\gamma}$ est unitaire, $\ddot{\gamma}$ est orthogonal à $\dot{\gamma}$ et donc

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n \mathbf{N}_\sigma + \kappa_g \mathbf{N}_\sigma \times \dot{\gamma}. \tag{7}$$

Si $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ est une courbe unitaire dans une surface, alors $\dot{\gamma}$ est un vecteur unitaire tangent à la surface. Donc $\dot{\gamma}$ est orthogonal au vecteur normal $\mathbf{N}_\sigma$ de σ, donc $\dot{\gamma}$, $\mathbf{N}_\sigma$ et $\mathbf{N}_\sigma \times \dot{\gamma}$ est une base orthonormée. Puisque $\dot{\gamma}$ est unitaire, $\ddot{\gamma}$ est orthogonal à $\dot{\gamma}$ et donc

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n \mathbf{N}_\sigma + \kappa_g \mathbf{N}_\sigma \times \dot{\gamma}. \tag{7}$$

Les scalaires κ_n et κ_g sont appelés, respectivement, *courbure normale* et *courbure géodésique* de γ. Puisque $\mathbf{N}_\sigma$ et $\mathbf{N}_\sigma \times \dot{\gamma}$ sont orthogonaux et unitaires, on déduit de (10) que la courbure κ de γ est donné par

$$\kappa = ||\ddot{\gamma}|| = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}. \tag{8}$$

On introduit les deux matrices symmétrique

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

On introduit les deux matrices symmétrique

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{t}_1 = \xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v$ et $\mathbf{t}_2 = \xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v$ sont deux vecteurs tangents à la surface en un point, alors

$$< \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 >= T_1^t \mathcal{F}_I T_2, \tag{9}$$

où

$$T_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

On introduit les deux matrices symmétrique

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{t}_1 = \xi_1\sigma_u + \eta_1\sigma_v$ et $\mathbf{t}_2 = \xi_2\sigma_u + \eta_2\sigma_v$ sont deux vecteurs tangents à la surface en un point, alors

$$< \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 >= T_1^t \mathcal{F}_I T_2, \tag{9}$$

où

$$T_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Les courbures principales de la paramétrisation σ sont les racines de l'équation

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa\mathcal{F}_I) = 0. \tag{10}$$

Si κ est une racine réelle de (10), il existe un vecteur colonne T non nul tel que

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_{I})T = 0. \tag{11}$$

Si κ est une racine réelle de (10), il existe un vecteur colonne T non nul tel que

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) T = 0. \tag{11}$$

Définition.

Si $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ vérifie (11), le vecteur tangent $\mathbf{t} = \xi \sigma_u + \eta \sigma_v$ à $\sigma(u, v)$ est appelé vecteur principal correspondant à la courbure principale κ.

Proposition.

Soient κ_1 et κ_2 les courbures principales en un point P d'une paramétrisation d'une surface σ. Alors :

1. κ_1 *et* κ_2 *sont deux nombres réels ;*
2. *si* $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, *alors* $\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_{I}$ *et donc tout vecteur tangent à la surface en* P *est un vecteur principal ;*
3. *si* $\kappa_1 \neq \kappa_2$, *alors tout couple de vecteurs principaux correspondant respectivement à* κ_1 *et* κ_2 *sont orthogonaux.*

Dans le cas 2., P est appelé point ombilique.

Exemple.

Il est intuitivement clair que la sphère courbe de la même manière dans toutes les directions et en tout point. Pour confirmer cela par le calcul, on utilise la paramétrisation de la sphère par la longitude et la latitude. On a

$$E = L = 1,\ F = M = 0,\ G = N = \cos^2\theta.$$

Donc les courbures principales sont les racines de

$$\begin{vmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & \cos^2\theta - \kappa\cos^2\theta \end{vmatrix} = 0,$$

i.e., $\kappa = 1$ *comme c'était prévisible. Chaque vecteur tangent est un vecteur principal.*

Proposition.

Les courbures principales en un point d'une surface sont le maximum et le minimum des courbures normales de toutes les courbes dans la surface passant par ce point. En plus, les vecteurs principaux sont les vecteurs tangents aux courbes qui réalisent ces minimum et maximum.

Proposition.

Les courbures principales en un point d'une surface sont le maximum et le minimum des courbures normales de toutes les courbes dans la surface passant par ce point. En plus, les vecteurs principaux sont les vecteurs tangents aux courbes qui réalisent ces minimum et maximum.

Les valeurs des courbures principales en un point P d'une surface nous donne des informations sur la forme de la surface au voisinage de ce point. On peut montrer que, au voisinage d'un point P d'une surface en lequel les courbures principales sont κ_1 et κ_2, la surface coincide avec la surface quadratique

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) \qquad (*)$$

si on néglige les terms d'ordre supérieur à deux.

Proposition.

Soit $\mathcal{S}$ une surface connexe pour laquelle tout point est ombilique. Alors $\mathcal{S}$ est soit une partie d'un plan soit une partie d'une sphère.

Soit $\widetilde{\sigma}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ et deux paramétrisations $\sigma(u, v)$ et soit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobienne de $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \longrightarrow (u, v)$ et soit J^t sa transposée. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ \\ F & G \end{pmatrix} J$$

et

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{pmatrix} = \pm J^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J.$$

En déduire que les courbures principales sont soit identiques soit opposées.

Courbure Gaussienne d'une surface

Définition.

Soient κ_1 *et* κ_2 *les courbures principales associées à une paramétrisation* σ *d'une surface* $\mathcal{S}$*. Alors, la courbure Gaussienne de* σ *est*

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

et sa courbure moyenne est

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Proposition.

Soit $\sigma(u, v)$ une paramétrisation d'une surface avec la première et la seconde forme, respectivement,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{et} \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Alors

1. $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$;
2. $H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$;
3. *les courbures principales sont* $H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Exemple.

1. *Pour la sphère unitaire, nous avons trouvé dans Exemple 3.3 que* $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, *donc* $K = H = 1$. *Pour le cylindre circulaire de rayon 1, nous avons trouvé que* $\kappa_1 = 1$ *et* $\kappa_2 = 0$ *et donc* $K = 0$ *et* $H = \frac{1}{2}$.

Exemple.

1. *Pour la sphère unitaire, nous avons trouvé dans Exemple 3.3 que* $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, *donc* $K = H = 1$. *Pour le cylindre circulaire de rayon 1, nous avons trouvé que* $\kappa_1 = 1$ *et* $\kappa_2 = 0$ *et donc* $K = 0$ *et* $H = \frac{1}{2}$.
2. *Considérons une paramétrisation d'une surface de révolution*

$$\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

avec $f > 0$ *et* $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$.*On a*

$$E = 1,\ F = 0,\ G = f^2,\ L = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g},\ M = 0,\ N = f\dot{g}.$$

Donc, d'après Proposition 4.1,

$$K = \frac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2}.$$

On considère la courbe profile dans le plan xz qui a pour équation

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{12}$$

En tournant cette courbe autour de l'axe des z on obtient une surface appelée *pseudo-sphère* qui a une courbure Gaussienne -1 partout.

On considère la courbe profile dans le plan xz qui a pour équation

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \arg\cosh\left(\frac{1}{x}\right). \tag{12}$$

En tournant cette courbe autour de l'axe des z on obtient une surface appelée *pseudo-sphère* qui a une courbure Gaussienne -1 partout.
Le résultat suivant montre que le signe de la courbure influence la forme globale de la surface.

Proposition.

Si $\mathcal{S}$ est une surface compacte, alors il existe un point P de $\mathcal{S}$ où la courbure Gausienne K est > 0.

Nous allons maintenant énoncer le théorème 'egregium' de Gauss. C'est la plus importante découverte de Gauss sur les surfaces. Gauss a qualifié son résultat de 'egregium' mot Latin qui désigne 'important'.

Théorème.

(Théorème remaquable de Gauss) *La courbure Gaussienne d'une surface est présérvée par les isométries. En particulier La courbure Gaussienne est donné par*

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}.$$

On finit par ce jolie théorème.

Théorème.

Toute surface compacte dont la courbure Gaussienne est constante est une sphère.