Éléments Finis
Maillage d'un domaine.
Application à la Résolution d'Equations D

Ahmed Kanber

5 mars 2010

Bonjour

Plan de l'exposé

1. Introduction
   - Différences Finis
   - Inconvénient
2. Éléments Finis
3. Maillage ou Triangulation
   - Définition
   - Détermination Pratique du maillage
4. Exemple : Programmé sous Matlab
5. Problème de Dirichlet

Différences Finis

$$\begin{cases} -\Delta(u) = -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\,; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

On discritise l'intervalle $[0, 1]$ en posant :

$h = \frac{1}{M}$, $x_i = (i-1) * h, i = 1, 2, \dots M+1$ par l'approximation

$f''(x) \backsimeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$ On obtient le problème appro

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 1, \quad i = 2, \ldots \ldots M\,; \\ u_1 = u_{M+1} = 0, \end{cases}$$

Soit alors $AU = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}, B = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inconvénients

Inconvénients

La méthode n'est pas modulaire :

Si on change les conditions aux bord la matrice change. La progra
matrice est à refaire.

$$\begin{cases} -\Delta(u) = -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\,; \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

La matrice devient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Géométrie du domaine :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f(x), & x \in \Omega\,; \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma\,; \end{cases}$$

$$x_i = (i-1) * h, i = 1 \ldots M+1$$

$$y_j = (j-1) * k, j = 1, \ldots N+1$$

$$u_i j \backsimeq u(x_i, x_j)$$

Principe de la société

- Représenter la société(champ continu)par des élus(noeuds)
- définir les propriétés de chaque individu(matrice de l'élément)
- définir son role dans la société (rotation dans le repère global
- établir des liens entre les individus (assemblage) et avec les a (conditions aux limites).
- Tout ceci permet d'obtenir le statut de la société (résolution) e niveau de vie déplacement .
- Ensuite retour aux individu (extractions des déplacements élé
- Détermination de leur part de revenu(contraintes,déformation leurs propriétés (matrices de rigidité) et du revenu global de la (déplacement structural).

Intérêt de la méthode des Éléments Finis

- La méthode prend les principes de la vie d'une socièté
- Traitement des formes géométriques compliqués
- Traitement des comportement complexes et évolutifs
- Couplage des différents phénomènes :mécanique, thermique hydraulique,...
- Exploitation rapide et directe des résultats

Éléments Finis $\mathcal{P}_1$

Éléments Finis triangulaires :

Soit $K = \widehat{z_1 z_2 z_3}$ un triangle de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{P}_k = \mathbb{R}_k[x, y]$ on a $\dim(\mathcal{P}_k) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Pour $k = 1$ $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$

Avec $\mathcal{L}_i(P) = P(z_i)$ (**Éléments Finis de Lagrange**)

Fonctions de Forme

C'est une fonction qui prend la valeur 1 au noeud i et 0 à tous les autres noeuds

$$N_1^K(x,y) = 1 - \frac{1}{2aire(K)}[(y_{i3}-y_{i1})(x-x_{i1}) - (x_{i3}-x_{i1})(y-y_{i}$$

$$(y_{i2}-y_{i1})(x-x_{i1}) + (x_{i2}-x_{i1})(y-y_{i1})]$$

$$N_2^K(x,y) = \frac{1}{2aire(K)}[(y_{i3}-y_{i1})(x-x_{i1}) - (x_{i3}-x_{i1})(y-y_{i1})]$$

$$N_3^K(x,y) = \frac{1}{2aire(K)}[-(y_{i2}-y_{i1})(x-x_{i1}) + (x_{i2}-x_{i1})(y-y_{i1})]$$

Maillage

On suppose que Ω est un ouvert "à frontière polyèdrique".
Soit $T_h = \{K_i, i = 1 \ldots m,\ avec\ K_i\ triangle\ \}$,
$h = \max\limits_i h_i$ avec h_i= diamètre du triangle.

Définition

On dira que T_h est une triangulation de Ω si et seulement si :

- *1)* $K_i^\circ \cap K_j^\circ = \emptyset$ *pour* $i \neq j$
- *2)* $K_i \cap K_j$ *est soit l'ensemble* $\emptyset$ *soit une arrête ou un sommet.*
- *3)* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} K_i = \Omega$

Détermination Pratique du maillage

Le maillage d'un domaine dépend de la géométrie du domaine. Si
simple on peut la construire facilement à partir d'un programme qu
ci-dessous. Si la géométrie est complexe, on peut utiliser des logic
Modulef,...).

Le maillage d'un domaine consiste à determiner les tableaux suiva

1. **coordonnés.dat** : ce tableau à trois colonnes est formé ainsi
   - la colonne 1 contient les **numéro des noeuds**
   - la colonne 2 contient les **abscisses des noeuds**
   - la colonne 2 contient les **ordonnés des noeuds**
2. **élément.dat** : ce tableau à quatre colonnes est formé ainsi :
   - la colonne 1 contient les **numéro des triangles**
   - les colonnes 2,3 et 4 contiennent les **numéros des noeuds** du
3. **bord.dat** : ce tableau à une colonnes est formé par les numér
   bord.

Exemples :Voir Programme

Maillage d'un rectangle

Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f(x), & x \in \Omega\,; \\ u(x,y) = g(x,y, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Formulation Variationnelle

On multiplie par une fonction test $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ puis on intègre sur Ω

$$\int_{\Omega} -\Delta(u)v(x,y)dxdy = \int_{\Omega} f(x,y)v(x,y)dxd$$

On applique Green-Rieman on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x,y)\nabla v(x,y)dxdy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(\sigma)d\sigma = \int_{\Omega} f(x,y)$$

le deuxième terme est nulle si $v \in H_0^1(\Omega)$

Formulation Variationnelle du Problème de Dirichlet

$$FVD : \begin{cases} \textit{Trouver } \ u \in H^1(\Omega) \textit{ telle que } \ u(x,y) = g(x,y, \\ \int_\Omega \nabla u(x,y) \nabla v(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) v(x,y) dxdy, \end{cases}$$

Formulation Approchée

On munie Ω d'une triangulation Voir 3.1. On construit l'espace d'a

$$V_h^1 = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v_h/_{K_i} \in P_1\}$$

Théorème

On démontre les résultats suivant :

1. V_h^1 *est un espace vectoriel de dimension fini en outre* $\dim(V_h^1$ *noeud du maillage.*
2. $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ *base canonique de* V_h^1 *vérifie :*
   - $\Phi_i \in V_h^1$ *et* $\Phi_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $\Phi_i/_{K_j} \in P_1$
   - $\Phi_i(z_j) = \delta_{i,j}$
   - *Si* $z_i \in K_j$ *alors* $\Phi_i/_{K_j} = N_l^{K_j}, l =, 2$ *ou* 3.
   - *Si* $z_i \notin K_j$ *alors* $\Phi_i/_{K_j} = 0$

Formulation Approchée

Le Problème Approché devient :

$$FVA : \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Trouver } u_h \in V_h^1 \textit{ telle que } u_h(x,y) = g(x,y, & (x \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_h(x,y) \nabla v_h(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) v_h(x,y) dxdy, & \forall v \end{array} \right.$$

Remarque

Pour $z_j \in \partial\Omega$ *alors* $u_h(z_j) = g(z_j)$ *est connue.*

La $(FVA) \Leftrightarrow$:

$$FVAD : \begin{cases} Trouver \;\; u_h \in V_h^1 \;\; telle\ que \;\; u_h(x,y) = g(x,y), \\ \int_\Omega \nabla u_h(x,y) \nabla \Phi_i(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) \Phi_i(x,y) dxdy, \end{cases}$$

On va définir deux ensembles d'indices :

$$J_0 = \{j \in [1 : M] \; tel\ que \;\; , z_j \in \partial\Omega\}$$

$$J = setdiff(1 : M, J_0)$$

Résolution Numérique du PVAD

$u_h \in V_h^1$ donc $u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \Phi_j(x,y) = \sum_{j\in J_0} \alpha_j \Phi_j(x,y) + \sum_{j\in J} \alpha_j \Phi_j($

problème PVAD revient donc à trouver $(\alpha_j)_{1\leq j\leq M}$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha_j = g(z_j), & j \in J_0 \\ \sum_{j\in J} \int_\Omega \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)\alpha_j dxdy & = \\ & \int_\Omega f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy - \\ & -\sum_{j\in J_0} \int_\Omega g(z_j)\nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(\end{cases}$$

Discritisation du PVA

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq M}$ avec $a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_j(x,y) \nabla \Phi_i(x,y) dx$

$A :\leftarrow$ **Matrice de rigidité**

$b = (b_i)_{1 \leq i,j \leq M}$ avec $b_i = \int_{\Omega} f(x,y) \Phi_i(x,y) dxdy$ et $G = (G(i))_{1 \leq i,j \leq}$
$j \in J$ et 0 sinon.

Système Linéaire

Le problème revient donc à trouver $\alpha \in \mathbb{R}^M$ tel que :
$\alpha_j = g(z_j)$ *si* $j \in J_0$ *et* $A(J,J)\alpha(J) = B(J) - A.G$

Procédé d'assemblage

Résolution Numérique du PVAD

Comment calculer a_ij?

$$a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N} \int_{K_k} \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy$$

Comment calculer b_i?

$$b_i = \int f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy = \sum^{N} \int f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy$$

Contributions des K_i

On a : $\int_{K_k} \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy = \int_{K_k} \nabla(\Phi_j/_{K_k})(x,y)\nabla(\Phi_i/_{K_k})($

$\Phi_i/_{K_k} = N_{km}^{K_k}$ et $\Phi_j/_{K_k} = N_{kl}^{K_k}$, $kl, km \in 1,2,3$ et $\Phi_i/_{K_k} = 0$ si $i \notin T^{I}$
noeud du triangle K_k. En résumé on a :

$$Si\ i,j \in T^{K_k},\ Alors\ a_{i,j} = \int_{K_k} \nabla(N_{kl}^{K_k})\nabla(N_{km}^{K_k})dx$$

On a de même :

$$Si\ i \in T^{K_k},\ Alors\ b_i = \int_{K_k} N_{kl}^{K_k} f(x,y)dxdy$$

On définit ainsi les matrices élémentaires : $E^K = (E_{l,m}^K)_{1_leql,m\leq 3}$ et

$$E_{l,m}^K = \int \nabla(N_{kl}^K)\nabla(N_{km}^K)dxdy\ et\ F_l^K = \int N_{kl}^K f(x,y$$

Remarque

Pour le calcul des intégrales, on l'approximation la formule de qua Gauss-Legendre :

$$\int\int_K h(x,y)dxdy \simeq \frac{aire(K)}{3}(h(\widehat{z}_1 + \widehat{z}_2 + \widehat{z}_3$$

$\widehat{z}_i$ *sont les milieus des sommets et* $aire(K) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Assemlage

Assemblage

Début *Pour* $i = 1$ *à nbr des éléments Faire*

$T = element(i, 1)$;
$e_x = coord(T, 1)$;
$e_y = coord(T, 2)$;
$K_e = matelt(e_x, e_y)$;
$F_e = secmebre(e_x, e_y)$;
$A(T, T) = A(T, T) + K_e$;
$B(T) = B(T) + F_e$;

FinPour

Fin.

Remarque

On TP on a va résoudre le problème de Dirichlet généralisé suiva

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}(x,y) = f(x,y)) \\ u(\sigma) = g(\sigma), \end{cases}$$

Problème de Newman

$$\begin{cases} a(x,y)u(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x,y) = \\ \dfrac{\partial u}{\partial V_A}(\sigma) = g(\sigma), \end{cases}$$

Avec $\dfrac{\partial u}{\partial V_A}$ *désigne la dérivée conormale de u par rapport à l'opéra*

$$A = -\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial V_A} = \sigma_1(\sigma)\frac{\partial u}{\partial x}n_1(\sigma) + \sigma_2(\sigma)\frac{\partial u}{\partial y}n_2(\sigma)$$

Formulation Approchée

On démontre de même que le problème revient à : trouver $(\alpha_j)_{1\leq j\leq}$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j\in J}\int_\Omega a(x,y)\Phi_j(x,y)\Phi_i(x,y)\alpha_j dxdy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \\ \displaystyle\int_\Omega f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy - \\ \displaystyle -\sum_{j\in J_0}\int_\Omega \sigma_1\frac{\partial}{\partial x}\Phi_j(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x,y)dxdy \\ \displaystyle -\sum_{j\in J_0}\int_\Omega \sigma_2\frac{\partial}{\partial y}\Phi_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\Phi_i(x,y) \end{array}\right.$$

Problème de Robin

$$\left\{\begin{array}{l} a(x,y)u(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x,y) = \\ u(x,y) = g(x,y), \\ \alpha u(x,y) + \beta\sigma_1(\sigma)\dfrac{\partial u}{\partial x}n_1(\sigma) + \beta\sigma_2(\sigma)\dfrac{\partial u}{\partial y}n_2(\sigma) = h(x,y) \end{array}\right.$$

Problème de Robin

L'espace est $V = \{v \in H^1(\omega),\ tel\ que\ \ v = 0\ sur\ \ \Gamma_1\}$*. L'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} A : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega auv + \int_\Omega \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \int \end{array}$$

La forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} L : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega fv + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\beta} hv \end{array}$$

Théorème

On a les résultat suivant :

- *si* $mes(\Gamma_1) > 0$ *alors* V *est s.e.v fermé de* $H^1(\Omega)$*.*
- *l'opérateur A est continue est coercive*
- *La forme linéaire L est continue sur* V*.*

Le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité d

Résolution Numérique du PVAD

On pose $J_0 = \{j \in [1:M]$ *tel que* $, z_j \in \Gamma_1\}, J = setdiff(1:M, J_0)$.

$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \Phi_j(x,y) = \sum_{j \in J_0} \alpha_j \Phi_j(x,y) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Phi_j(x,y)$. *La réso*
PVAD revient donc à trouver $(\alpha_j)_{1 \le j \le M}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \alpha_j = g(z_j), & j \in J_0 \\ \sum_{j \in J} a_{i,j}\alpha_j & = b_i \end{cases}$$

avec

$$a_{i,j} = \int_\Omega a(x,y)\Phi_i\Phi_j + \int_\Omega \sigma_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_j}\frac{\partial v}{\partial y} + \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{\beta}\Phi_i\Phi_j$$

et $b_i = \int f\Phi_i + \int \frac{1}{\beta} h\Phi_i$

Travaux Pratique Sous Matlab

Voir TP

Présentation FreeFem++ / Histoire

Developpé au Laboratoire L-Lions, Universsité de Piére et Marie C

- 1987 *MacFem/PcFem (Pascal) Payant*
- 1996 *FreeFem réecriture en* $C++$
- 1999 *FreeFem 3D*
- 2008 *Réecriture du noyau pour tenir compte 1d, 2d, 3d*

Présentation FreeFem++ / c'est quoi

Le langage de freefem++ permet

- *de spécifier rapidement des EDP (2d,3d),*
- *de manipuler plusieurs maillages (2d,3d)*
- *d'écrire des scripts à la $C++$ pour définir vos algorithmes nu problèmes : non-linéaires, in- stationnaires, couplés...*

Voir www.FreeFemm.org

Exemple de Maillage Par FreeFem++

Voir Exemple

Merci de votre attention