TP : Statistiques sur un demi-cercle

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. On considère un demi-cercle (C) de diamètre $[AB]$. On choisit au hasard un point M sur le demi-cercle (C). On note Θ l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$. L'aire du triangle OAM est égale à $\frac{1}{2}\sin(\Theta)$

Le but du T-P est de simuler le tirage au hasard de 100 points sur le demi-cercle et calculer la fréquence du nombre de triangles OAM dont l'aire est inférieure à $0,25$.

Recommencer l'expérience en prenant pour n toutes les valeurs entières entre 100 et 1000 et tracez l'évolution des fréquences successives obtenues en fonction du nombre de tirages n.

Que peut-on conjecturer quant à la probabilité p que l'aire d'un triangle AOM soit inférieure à 0,25 ?

Voici le programme :

Déclarons le nombre de points simulés.

```
--> N=10000;
--> x=[1:N];
```

Calculons l'aire correspondante du triangle OAM pour chaque points simulé et dénombrons ceux dont l'aire est inférieure à 0.25.

```
--> aire=[0.5*sin(%pi*rand(N,1))];
```

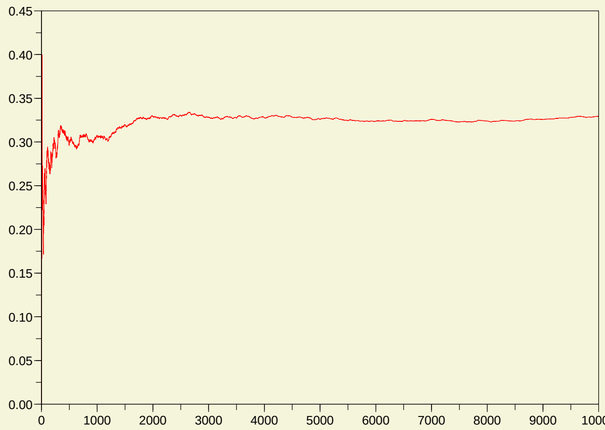
```
--> for i=1:N,
-->  if aire(i)<=0.25 then eff(i)=1;
-->  elseif aire(i)>0.25 then eff(i)=0;
-->  end,
--> end;
```

On peut alors calculer les fréquences successives.

```
--> for i=1:N, f(i)=(sum(eff(1:i)))/i;end;
```

On trace l'évolution des fréquences en fonction du nombre de points simulés.

```
--> plot2d(x,f,style=5)
```



On pourrait recommencer la simulation plusieurs fois sans effacer le graphique qui précède et observer ce qui se passe :

On admet que, *choisir au hasard* un point M sur le demi-cercle, revient à dire que la variable Θ qui,à chaque point M associe l'aire du triangle OAM suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;\pi]$.

La densité de probabilité de cette loi uniforme est la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\pi}$.

L'aire du triangle OAM est inféreure ou égale à 0,25 si et seulement si $\Theta\in[0;\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6}\pi]$.

De ce qui précéde, on peut en déduire la probabilité

$$p=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}d\theta\right]=\frac{1}{3}.$$

Cela est conforme à ce que l'on a observé grâce aux différents simulations précédentes.