Option Informatique en Spé MP et MP*
Programmation Caml : intervalles discrets

Placez au début de votre programme un commentaire indiquant votre nom, votre classe, la date, et le sujet du T.P. Rédigez les réponses aux questions autres que celles de pure programmation sur une feuille de papier séparée : vous n'êtes pas ici pour faire preuve de vos éventuels talents de dactylographe.

▶ Notons $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Nous étendons l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ à $\overline{\mathbb{Z}}$ en décrétant que $-\infty < p < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Les intervalles (discrets) de $\overline{\mathbb{Z}}$ sont de l'une des quatre formes suivantes :

- intervalles bornés, de la forme $[\![p, q]\!]$;
- demi-droite de la forme $[\![-\infty, p]\!]$;
- demi-droite de la forme $[\![p, +\infty]\!]$;
- $\overline{\mathbb{Z}} = [\![-\infty, +\infty]\!]$.

La borne inférieure et la borne supérieure d'un intervalle discret $\mathcal{I}$ de $\overline{\mathbb{Z}}$ sont définies de façon naturelle et seront notées respectivement $\inf \mathcal{I}$ et $\sup \mathcal{I}$. Nous noterons $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire comme réunions finies d'intervalles discrets.

Question 1 Montrez que $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion, l'intersection et le passage au complémentaire.

▶ Nous dirons que l'intervalle $\mathcal{I}$ précède l'intervalle $\mathcal{J}$, et nous noterons $\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$, dans les deux cas suivants :

- $\inf \mathcal{I} < \inf \mathcal{J}$;
- $\inf \mathcal{I} = \inf \mathcal{J}$ et $\sup \mathcal{I} < \sup \mathcal{J}$.

Nous noterons $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}$ lorsque $\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$ ou $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

Question 2 Montrez que $\preceq$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble des intervalles de $\overline{\mathbb{Z}}$.

▶ Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux intervalles tels que $\sup \mathcal{I}$ et $\inf \mathcal{J}$ appartiennent à $\mathbb{Z}$. Nous dirons que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont *consécutifs* lorsque $\sup \mathcal{I} = \inf \mathcal{J} - 1$; dans ce cas, la réunion de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ est un intervalle, dont la borne inférieure est $\inf \mathcal{I}$ et dont la borne supérieure est $\sup \mathcal{J}$.

Question 3 Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux intervalles appartenant à une représentation de longueur minimale d'un élément de $\mathcal{A}$. Montrez que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont disjoints et ne sont pas consécutifs.

▶ Soit U un élément de $\mathcal{A}$ représenté par la liste $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$. Nous dirons que cette représentation est *réduite* si elle est de longueur minimale, et si les intervalles qui la forment sont classés par ordre croissant pour la relation $\preceq$.

Question 4 Montrez que tout élement de $\mathcal{A}$ possède une représentation réduite, et expliquez comment obtenir cette dernière.

▶ Nous nous proposons d'écrire diverses fonctions réalisant des calculs dans cette algèbre. Nous commençons par définir les types suivants :

```
type zbarre = Relatif of int | MoinsInf | PlusInf ;;
type intervalle = Interv of zbarre * zbarre ;;
```

Ainsi, $[\![2, 6]\!]$ sera représenté par `intervalle(Relatif 2,Relatif 6)` tandis que la demi-droite $[\![-\infty, -3]\!]$ sera représentée par `intervalle(MoinsInf,Relatif(-3))`. Un élément de $\mathcal{A}$ peut être représenté par une liste d'élements du type `intervalle` ; si `l` est une telle liste, nous noterons $\langle \ell \rangle$ l'élément de $\mathcal{A}$ qu'elle représente.

Question 5 • Rédigez en Caml une fonction :

```
intervalle_of_bornes : int -> int -> intervalle
```

spécifiée comme suit : `intervalle_of_bornes p q` construit l'intervalle discret $[\![p, q]\!]$ si $p < q$, et lève une exception dans le cas contraire.

Question 6 • Rédigez en Caml les fonctions :

```
dd_g : int -> intervalle
dd_d : int -> intervalle
```

spécifiées comme suit : `dd_g p` construit la demi-droite $[\![-\infty, p]\!]$ et `dd_d p` construit la demi-droite $[\![p, +\infty]\!]$.

Question 7 • Rédigez en Caml les fonctions :

```
z_précède_strict : zbarre -> zbarre -> bool
z_précède_large : zbarre -> zbarre -> bool
```

spécifiées comme suit : `z_précède_strict x y` rend la valeur `true` ssi $x < y$; `z_précède_large x y` rend la valeur `true` ssi $x \leqslant y$.

Question 8 • Rédigez en Caml une fonction :

```
z_consécutifs : zbarre -> zbarre -> bool
```

spécifiée comme suit : `z_consécutifs x y` rend la valeur `true` ssi x et y sont des relatifs et vérifient $x+1=y$.

Question 9 • Rédigez en Caml une fonction :

```
consécutifs : intervalle -> intervalle -> bool
```

spécifiée comme suit : `consécutifs J J'` rend la valeur `true` ssi $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont consécutifs.

Question 10 • Rédigez en Caml une fonction :

```
est_à_gauche_de : intervalle -> intervalle -> bool
```

spécifiée comme suit : `est_à_gauche_de J J'` rend la valeur `true` ssi $\mathcal{J} \prec \mathcal{J}'$.

Question 11 • Rédigez en Caml une fonction :

```
réduire : intervalle list -> intervalle list
```

spécifiée comme suit : `réduire l` construit une représentation réduite de $\langle \ell \rangle$.

Question 12 • Rédigez en Caml une fonction :

```
union : intervalle list -> intervalle list -> intervalle list
```

spécifiée comme suit : `union l1 l2` construit une représentation réduite de $\langle \ell 1 \rangle \cup \langle \ell 2 \rangle$.

Question 13 • Rédigez en Caml une fonction :

```
complémentaire : intervalle list -> intervalle list
```

spécifiée comme suit : `complémentaire l` construit une représentation réduite de $\overline{\mathbb{Z}} \setminus \langle \ell \rangle$.

Question 14 • Rédigez en Caml une fonction :

```
intersection : intervalle list -> intervalle list -> intervalle list
```

spécifiée comme suit : `intersection l1 l2` construit une représentation réduite de $\langle \ell 1 \rangle \cap \langle \ell 2 \rangle$.

FIN