

Option Informatique en Spé MP et MP*

Calculs dans l'algèbre des parties ultimement périodiques de \mathbb{N}

► Une partie A de \mathbb{N} est *ultimement périodique* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow (n \in A \iff n + p \in A)$$

Le plus petit $p > 0$ répondant à cette définition est la *période* de A , et le plus petit n_0 est le *rang d'entrée* dans la période. Nous utiliserons dans la suite l'abréviation p.u.p.

Question 1 Montrez que l'ensemble des p.u.p. de \mathbb{N} est une algèbre, pour les opérations d'union, intersection et complémentation.

► Pour décrire une p.u.p. de \mathbb{N} , on définit le type Caml suivant :

```
type pup = { n_zero : int; p : int; base : int list };;
```

La signification des deux premiers champs est évidente; le troisième champ donne la liste des éléments de $A \cap \llbracket 0, n_0 + p - 1 \rrbracket$. Nous dirons que cette représentation est *réduite* si les valeurs de n_0 et p sont minimales.

Question 2 Donnez la représentation réduite de la partie p.u.p. A de \mathbb{N} définie par :

$$n \in A \iff (n < 50 \text{ et } n \equiv 3 [7]) \text{ ou } (n > 25 \text{ et } n \equiv 5 [8])$$

Question 3 Rédigez en Caml une fonction

```
appartient : pup -> int -> bool
```

spécifiée comme suit: `appartient x pupA` indique si x appartient à la p.u.p. A de \mathbb{N} .

Question 4 Rédigez en Caml une fonction

```
contient : pup -> pup -> bool
```

spécifiée comme suit: `contient pupA pupB` indique si A contient la p.u.p. B de \mathbb{N} .

Question 5 Rédigez en Caml une fonction

```
complementaire : pup -> pup
```

spécifiée comme suit: `complementaire A` construit la p.u.p. $\mathbb{N} \setminus pupA$.

Question 6 Rédigez en Caml une fonction

```
est_vide : pup -> bool
```

spécifiée comme suit: `est_vide pupA` indique si la p.u.p. A de \mathbb{N} est vide.

Question 7 Rédigez en Caml une fonction

```
reduction : pup -> pup
```

spécifiée comme suit: `reduction pupA` construit la représentation réduite de la p.u.p. A de \mathbb{N} .

Question 8 Rédigez en Caml une fonction

```
intersection : pup -> pup -> pup
```

spécifiée comme suit: `intersection pupA pupB` construit l'intersection des p.u.p. A et B de \mathbb{N} .

Question 9 Rédigez en Caml une fonction

```
union : pup -> pup -> pup
```

spécifiée comme suit: `union pupA pupB` construit l'union des p.u.p. A et B de \mathbb{N} .

FIN