# Outils Mathématiques

**A.Kanber: chargé d'Inspection**

kanber@ucam.ac.ma.

Journée D'informatiques II, Rabat, Maroc, 29octobre - 2 Novembre

# Sommaire

# 1: Dénombrement

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini $E$, appelé cardinal sera noté $|E|$.

**Rappels** : on suppose que $|E| = n, |F| = m$ et que $p \in [|1; n|]$.

- Le nombre d'application de $E$ vers $F$ est égal à $m^n$ : ainsi $|F^E| = |F|^{|E|}$
- Lorsque $m = n$, le nombre de bijection de $E$ sur $F$ est égal à $n!$.
- Le nombre d'injection de $[|1; p|]$ vers $[|1; n|]$ est égal à $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$.
- Le nombre de parties de $E$ ayant $p$ éléments est égal à $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

# 2: Ensembles dénombrables

## Definition

un ensemble est dit dénombrable si et seulement si il existe u ne bijection de $\mathbb{N}$ sur $E$.
Ainsi, on peut alors théoriquement "numéroter" tous les éléments de $E$ et écrire que $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

## Proposition

- *Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.*
- *Si $E_1, \ldots, E_p$ sont dénombrables, alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est dénombrable*
- *Si $I$ est dénombrable et si $\forall i \in I, E_i$ est dénombrable, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable*

**Exemples**:

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont dénombrables;
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{R}, [0,1]$ ne sont pas dénombrable.

# Coefficients binomiaux

- $C_n^{n-p} = C_n^p$ et $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ (Triangle de Pascal)
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \ \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_m^k C_n^{p-k} = C_{n+m}^p$

# Suites géométriques

Pour $pour x \neq 1,, \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

- $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
- $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+1}{(1-x)^2}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2x^k = dériver$

# Comportement Asymptotique de Suites

On se limitera dans ce chapitre au cas des suites réelles positives.

## Definition

On dit que $(u_n)$ est dominé par $(v_n)$, ce qu'on écrit $u_n = O(v_n)$

$$\exists \lambda > 0, \ \exists n_0 \ \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq n_0 \ \ u_n \leq \lambda v_n$$

## Proposition

$$O(O(u_n)) = O(u_n), \ O(u_n) + O(u_n) = O(u_n), \ \ \lambda O(u_n) = O(\lambda u_n) = O(u_n)$$

*et*

$$v_n O(u_n) = O(u_n v_n) = O(u_n) O(v_n)$$

## Définition

*On dit que deux suites* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *sont semblable ce qu'on note* $u_n = \theta(v_n)$ $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$

Exemple : Si $\lim \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ alors, $u_n = \theta(v_n)$

## Définition

*On dit* $(u_n)$ *est négligeable devant* $(v_n)$*, ce qu'on écrit* $u_n = o(v_n)$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \ \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq n_0 \ \ u_n \leq \epsilon v_n$$

*Ce quit est équivalent à dire :*

$$\exists (\epsilon_n) \rightarrow 0 \ et \ n_0 \ \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq n_0 u_n = \epsilon_n v_n$$

# Exemples de Références

Pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ on a :

$$n^{\alpha} = o(n^{\beta}) \Leftrightarrow \alpha < \beta, \ \ ln^{\beta}(n) = o(n^{\alpha}), \ \ n^{\alpha} = o(a^{n}), \ \ a^{n} = o(n!)$$

# Equivalence

## Définition

*On dit que* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *sont équivalente, ce qu'on écrit* $u_n \sim v_n$ $|u_n - v_n| = o(v_n)$ *ce qui est équivalent à dire :*

$$\exists(\epsilon_n) \to 0 \text{ et } n_0 \ \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0 u_n = (1+\epsilon_n)v_n$$

## Remarque

*La relation* $\sim$ *définie une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

## Proposition

*Si* $u_n \sim u'_n$ *et* $v_n \sim v'_n$ *alors*

- $u'_n = O(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u'_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = o(v_n)$

# Sommation des Relations de Comparaisons

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites positives. On note $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si $\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ On a les résultats suivants :

- si $u_n = O(v_n)$, alors $U_n = O(V_n)$
- si $u_n = o(v_n)$, alors $U_n = o(V_n)$
- si $u_n \sim v_n$, alors $U_n \sim V_n$

# Comportement Asymptotique de certain somme

On suppose que $f$ est une fonction à valeurs positive décroissante, continue sur $[p, +\infty[$. On pose $S_n = \sum_{k=p+1}^{n} f(k)$. On a alors l'encadrement suivant :

$$\int_{p+1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_{p}^{n} f(x)dx$$

Exemples classiques :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad lnn! \sim n \ln n, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

# Suites Récurrentes Linéaire de Premier Ordre

Se sont des suites vérifiant une relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = a(n)u_n + b(n) \quad (E)$.// On se propose de donner des méthodes permettant, lorsque c'est possible, de calculer explicitement $u_n$ en fonction de $n$, ou à défaut de donner un équivalent de $u_n$.

- Principe $\mapsto$ au cas particulier $a(n) = 1$.
- On pose $p(n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} a(k)$ $\circlearrowleft$ le changement de $v_n = \frac{v_n}{p(n)}$.
- On obtient alors

$$v_{n+1} = v_n + c(n), \quad c(n) = \frac{b(n)}{p(n+1)}$$

## Récurrence $u_{n+1} = au_n + br^n$

- Méthode rapide: Ici

$$p(k) = a^k, v_k = \frac{u_k}{a^k}$$

  On obtient :
  - si $r \neq a$ alors $u_k = \alpha a^k + \beta r^k$
  - si $r = a$ alors $u_k = (\alpha + \beta k) r^k$
- En se ramenant au $2^{ième}$ ordre : A partir des relations $u_k = au_{k-1} + br^k$ et $u_{k-1} = au_{k-2} + br^{k-1}$ on obtient :

$$u_k - (a + r)u_{k-1} + aru_{k-2} = 0$$

# Application à des suites fréquentes : Coûts d'Algorithmes

$T(n)$ une suite croissante positive vérifiant :

$$\forall n = 2^k, \ T(n) = aT(\frac{n}{2}) + \theta(n^p)$$

On s'intéresse d'abord à la suite extraite $kT(2^k)$
On introduit les deux suites définie par :

$$u_0 = T(0) \quad u_{k+1} = au_k + \gamma(2^{k+1})^p \quad \forall k \geq 0 \qquad (1)$$

$$v_0 = T(0) \quad v_{k+1} = av_k + \delta(2^{k+1})^p \quad \forall k \geq 0 \qquad (2)$$

# Référence

**Référence : D'après un cours d'Informatique que j'ai suivi dans la classe de mon ancien ami et collègue DANIEL GENOUD au lycée Lamartinière Mon plaisir à Lyon**