Equations Non Linéaires

A.Kanber : chargé d'Inspection

kanber@ucam.ac.ma.

Journée D'informatiques II, Rabat, Maroc, 29octobre - 2 Novembre

Sommaire

1: Introduction

Le numéricien est souvent confronté à la résolution d'équation algébrique

$$f(x) = 0$$

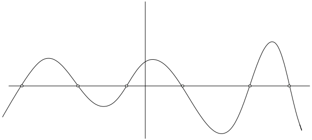
1: Position du problème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. On désire trouver une ou plusieurs solutions de l'équation $f(x) = 0$.
f est supposé continu et dérivable autant de fois qu'il est nécessaire sur l'intervalle où sont cherché les racines.

1: Séparation des racines

Definition

Une racine s de f est dite séparé dans un intervalle I si s est la seul solution de $f(x) = 0$ dans I



Séparation des Racines

Méthode de la bissection : Dichotomie

Considérons l'équation $f(x) = 0$ où la fonction f vérifie $f(a)f(b) < 0$. On pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$ on a trois cas :

- $f(x_0) = 0$
- $f(a)f(x_0) < 0$, on pose alors $x_1 = \frac{x_0+a}{2}$
- $f(b)f(x_0) < 0$, on pose alors $x_1 = \frac{x_0+b}{2}$

- 1. Ètant donné $[x_1, x_2]$ ou f possède un changement de signe.
- 2. Ètant donné $\epsilon > 0$ (critère d'arrêt), N le nombre maximum d'itération.
- 3. Posons $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$
- 4.Si $\frac{|x_2-x_1|}{2x_m} < \epsilon$
  - convergence atteinte.
  - écrire $f(x_m)$
  - arrêt.
- 5. écrire $f(x_1), f(x_2), f(x_m)$
- 6.si $f(x_m)f(x_1) < 0$, alors $x_2 = x_m$
- 7.si $f(x_m)f(x_2) < 0$, alors $x_1 = x_m$
- 8. si le nombre d'itération est N est atteint :
  - Convergence non atteint
  - Arrêt
- 9.Retour à 3

Méthode des approximations successives

Definition

Un point fixe d'une f sur un intervalle I est une valeur $x \in I$ telle que $f(x) = x$

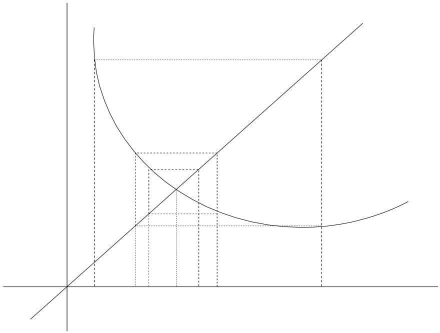
Theorem

Si f est continu sur $[a, b]$ à valeur dans $[a, b]$ alors f admet un point fixe.
si f est dérivable sur $[a, b]$ et s'il existe $L \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| < L$ alors f admet un unique point fixe dans $[a, b]$

Principe

L'algorithme des approximation successive consiste à construire la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in I, & \text{arbitraire;} \\ x_{n+1} = f(x_n), & . \end{cases}$$



Algorithme

- 1. Ètant donné $\epsilon > 0$(critère d'arrêt), N nombre maximum d'itération.
- 2. x_0 une valeur estimée initiale du point fixe
- 3. Effectuer $x_{n+1} = f(x_n)$
- 4.Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{x_{n+1}} < \epsilon$
  - convergence atteinte.
  - écrire x_{n+1}
  - Arrêt.
- 5. si le nombre d'itération est N est atteint :
  - Convergence non atteint
  - Arrêt
- 6.Retour à 3

Importance

La méthode de Newton est l'une des méthode les plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires

Principe

à partir d'une valeur initial x_0 de la solution, on cherche une correction δ telle que

$$f(x_0 + \delta) = 0$$

En faisant un développement de Taylor autour de x_0 on trouve :

$$0 = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{\delta^2}{2} f"(x_0) + \ldots$$

Si on néglige les termes d'ordre supérieure à 2 on obtient :

$$0 \simeq f(x_0) + \delta f'(x_0)$$

ce qui donne :

$$\delta = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Algorithme

- 1. Ètant donné $\epsilon > 0$, le critère d'arrêt
- 2. Ètant donné N le nombre maximum d'itération.
- 3. x_0 une valeur initial de la solution
- 4. Effectuer $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- 5.Si $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{x_{n+1}} < \epsilon$
  - convergence atteinte.
  - écrire x_{n+1}
  - Arrêt.
- 6. si le nombre d'itération est N est atteint :
  - Convergence non atteint
  - Arrêt
- 7.Retour à 4

Programmes MAPLE

Voir TP MAPLE

Référence

Analyse numérique pour l'ingénieur André Fortin