

Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits Mines-Telecom

Planche 1

Oral IMT (MP) 2025.

Soient A et B dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Montrer que :

$$0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B).$$

Planche 2

Oral IMT 2024 (MP).

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- 1) Domaine de définition.
- 2) C^0 ? C^1 ?
- 3) Variations, limites aux bords.
- 4) Équivalent en $+\infty$.
- 5) Équivalent en 0.

Planche 3

Oral IMT 2023 (MP)

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$
en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 4

Oral IMT 2023 (MP)

Nature de la série $\sum u_n$, où

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$$

Planche 5

Oral IMT 2023 (MP)

Nature de la série

$$\sum \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$$

Indication

(Planchette
①) mg

il suffit de mg voir sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

$$A = P D P^T \Rightarrow \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(P D P^T B P P^T)$$

$$= \text{Tr}(B P^T B P)$$

$$= \text{Tr}(D B')$$

$$B' \sim B$$

$$B' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i b'_{ii} \leq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$$

$$b'_{ii} = \langle B' e_i, e_i \rangle \geq 0$$

$$\text{car } B' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\lambda_i \leq \text{Tr}(A)$$

(Planchette
②)

$$\textcircled{1} \quad x > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x} \text{ intég. sur } \mathbb{R}^+$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ N.m. intég. en } 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{e^{-t}}{x+t} \text{ n'est pas défini sur } \mathbb{R}^+ \text{ pour } t = -x$$

$$\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$$

$$(2) \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-t}}{x+t} \right) \right| \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2} \leq \frac{e^{-t}}{A} \quad \forall x \in (A, +\infty[\quad \forall t > 0$$

donc $f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$

$$(3) f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt < 0 \Rightarrow f \downarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} : \text{sur } (A, +\infty[\quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x} \leq \frac{e^{-t}}{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$$

$$\lim_0 : u = x+t \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \sim \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = +\infty \quad \text{car } \int_0^1 \frac{e^{-u}}{u} du \text{ diverge}$$

$$(4) \text{ IPP} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-t}}{x+t}}_{u'} \underbrace{\frac{1}{x+t}}_v dt = \left[\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \quad \text{thm généraux}$$

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{car } \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2} dt$$

$$(5) f(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \sim \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$= \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{cte}$$

$$\sim \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du \sim \int_x^1 \frac{1}{u} du = -\ln x$$

$$\text{car } \frac{e^{-u}}{u} \sim \frac{1}{u}$$

Planché
(3)

$$\alpha < 0 \quad n^{2\alpha} + (-1)^n < 0 \text{ pour } n \text{ impair}$$

$\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}$ Non défini

$$\alpha > 0 \quad \text{CSSA ne peut \u00e9viter}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$$

Astuce
DL

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n \quad v_n \sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$$

$$\sum u_n w(n) \sum v_n w(n) \quad 3\alpha > 1$$

Planche (4)

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) \quad (u_n > 0)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$\swarrow$ finit quand $n \rightarrow \infty$
 $\swarrow$ $-\alpha$ $n \rightarrow \infty$
 $\swarrow$ finit qd $n \rightarrow \infty$

$$\ln u_n \sim -\frac{1}{2} H_n \sim -\frac{1}{2} \ln n$$

$$\ln u_n = -\frac{1}{2} H_n + v_n \text{ tq } v_n \rightarrow \alpha \text{ finit}$$

$$u_n = e^{-\frac{1}{2} H_n} e^{v_n} = e^{-\frac{1}{2} (H_n - \ln n + \ln n)} e^{v_n}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} (H_n - \ln n)} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{v_n} \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$$

car $H_n - \ln n \rightarrow \gamma$ cte d'Euler

Planche (5)

$$\begin{aligned}
 u_n &= \cos \pi \sqrt{n^2 + n + 1} = \cos \pi n \left(1 + \frac{n+1}{n^2} \right)^{1/2} \\
 &= \cos \pi n \left(1 + \frac{1(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{n+1}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= (-1)^n \cos \left(\frac{\pi(n+1)}{2n} - \frac{\pi}{8} \frac{(n+1)^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= (-1)^n \frac{\pi(n+1)}{2n} + (-1)^n \frac{\pi}{8} \frac{(n+1)^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

Σ ✓