Equations Différentielles

Blaque du jour
Question : Qu'est-ce qu'un ours polaire ?
Réponse : Un ours cartésien après avoir changé ses coordonnées.

Michel Chasles (1793-1880)

Mathématicien français, il entre à l'École polytechnique en 1812. Il y devient professeur en 1841. En 1846, une chaire de géométrie supérieure est créée pour lui à la Sorbonne. Il est élu en 1851 membre de l'Académie des sciences. Son nom est attaché à la relation de Chasles mais cette propriété était déjà été utilisée longtemps avant lui. Il a inventé le terme homothétie. Il a aussi travaillé sur les homographies et la géométrie projective. Il a introduit le rapport anharmonique appelé aussi birapport de 4 points alignés.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit I un intervalle et a, b, c des fonctions définies sur I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle $ay' + by = c$ toute fonction y, dérivable sur I, telle que :

$$\forall t \in I \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

On dit que l'équation est résolue lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est homogène lorsque la fonction c est nulle.

1.1 Équation différentielle homogène

Soit I un intervalle et a une fonction continue sur I. Si A est une primitive de a, les solutions de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

sont les fonctions :

$$y_c : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ce^{-A(t)} \end{array}$$

où $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Équation différentielle avec second membre

Soit I un intervalle et a, b deux fonctions continues sur I. Si y_p est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I \quad y'(t) + ay(t) = b(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$\forall t \in I \quad y'(t) + ay(t) = 0$$

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Équation différentielle homogène

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On considère le trinôme $aX^2 + bX + c$.

— Si ce trinôme possède deux racines distinctes r_1 et r_2 (cas où $\Delta \neq 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions :

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

— Si ce trinôme admet une racine double r (cas où $\Delta = 0$), alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions :

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (c_1 t + c_2) e^{rt} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On considère le trinôme $aX^2 + bX + c$.

— Si ce trinôme possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 (cas où $\Delta > 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

— Si ce trinôme admet une racine double r (cas où $\Delta = 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (c_1 t + c_2) e^{rt} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

— Si ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ (cas où $\Delta < 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] e^{rt} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.2 Équation différentielle avec second membre

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et d une fonction réelle (ou complexe) définie sur $\mathbb{R}$. Si y_p est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

— Si d_1, d_2 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et y_{p_1}, y_{p_2} sont des solutions particulières des équations différentielles respectives $ay'' + by' + cy = d_1$ et $ay'' + by' + cy = d_2$, alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

— Si d est une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$ et y_p est une solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$, alors $\Re(y_p)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \Re(d(t))$$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

— Si P est un polynôme de degré n, alors l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t)$ où Q est un polynôme de degré n et :

  — $m = 0$ lorsque $c \neq 0$.

  — $m = 1$ lorsque $c = 0$ et $b \neq 0$

  — $m = 2$ lorsque $c = 0$ et $b = 0$

— Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et :

  — $m = 0$ lorsque α n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$.

  — $m = 1$ lorsque α est racine simple de $aX^2 + bX + c$.

  — $m = 2$ lorsque α est racine double de $aX^2 + bX + c$.

Fin