Samedi 21 Janvier 2017

Structures Algébriques

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; en algèbre, sur la résolution des équations. Il est à l'origine de la notion de nombre algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients rationnels). Il fréquenta de grands mathématiciens tels Gauss, Cauchy, Jacobi, Legendre,... Il mourra, pauvre et très jeune (27 ans) suite à une tuberculose. Abel est le nom d'un des fils de Eve et Adam.

Blaque du jour

Dans une deux-chevaux il y a, un Physicien, un Électronicien, un Chimiste et un Mathématicien. Tout à coup la voiture s'arrête et le moteur s'éteint.

- Le Physicien dit : « Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Mais non, dit le chimiste, c'est la faute des acides de la batterie !
- À mon avis c'est le circuit électronique qui ne marche plus ! » dit l'électronicien.
- Le Mathématicien en dernier : « ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres, de sortir, et redémarrer à nouveau ? »

Lois de composition interne :

Définition :

Une L.C.I sur un ensemble E, est au fait une application $f :: \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$, on note $x*y$ ou $x.y$ ou même xy au lieu de $f(x,y)$.

Vocabulaire.

- Une L.C.I définie sur E est *associative* si et seulement si $\forall (x,y,z)\in E^3$ on a : $(x.y).z = x.(y.z)$.
- Une L.C.I définie sur E est *commutative* si et seulement si $\forall (x,y)\in E^2$ on a : $x.y = y.x$.
- Un élément e est dit *neutre* pour une L.C.I définie sur E si et seulement si $\forall x\in E$ on a : $x.e = e.x = e$. Notez bien qu'une L.C.I admet un seul ou aucun élément neutre.
- Si une L.C.I admet un élément neutre, e, dans ce cas tout élément $x\in E$ est dit *inversible* lorsqu'il existe un élément $x'\in E$ tel que $x.x' = x'.x = e$. Dans une telle situation le x' est unique, on le note par x^{-1} et s'appelle l'inverse de x.
- Si deux éléments x et y sont inversibles pour une L.C.I définie sur E, alors $x.y$ est inversible avec $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$.

Les groupes.

Définition :

Un ensemble G muni d'une L.C.I est dit un groupe *si et seulement si* . est associative, admet un élément neutre, noté en général e_G et tout élément de G est inversible pour cette loi.

Sous-groupes.

Définition :

Une partie H d'un sous groupe $(G, .)$ est dite *sous-groupe* de G si et seulement si H est aussi un groupe pour la même L.C.I.

Remarque :

En pratique, pour montrer qu'une partie H d'un sous groupe $(G, .)$ est dite sous-groupe de G il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} e_G \in H \\ \forall (x, y) \in H^2 \text{ on a : } x.y^{-1} \in H \end{cases}$$

Morphismes de groupes.

Définition :

Une application f entre deux groupes $(G, .)$ et $(G', *)$ est dite morphisme si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad f(x.y) = f(x) * f(y)$$

Exemple.

l'exponentielle définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, alors que le logarithme l'est de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

Remarque :

Si f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$, alors :

$$\begin{array}{ll} f(e_G) = e_{G'} & \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} & \forall x \in G \\ f(x^n) = f(x)^n & \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Vocabulaire.

Soit f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$.

- ☛ On dit que f est un isomorphisme *si et seulement si* f bijective.
- ☛ On dit que f est un endomorphisme de G *si et seulement si* $G = G'$.
- ☛ On dit que f est un automorphisme de G *si et seulement si* $G = G'$ et f bijective.

Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Définition :

Soit f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$. On appelle :

— Noyau de f, le sous-groupe de G, noté $\ker f$ défini par :

$$\ker f = \{x \in G \text{ tel que } f(x) = e_{G'}\}$$

— Image de f, le sous-groupe de G', noté $\operatorname{Im}(f)$ défini par :

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in G' \text{ tel que } \exists x \in G : \quad y = f(x)\}$$

Propriétés.

Soit f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$, alors :

- f est surjective *si et seulement* si $\operatorname{Im}(f) = G'$.
- f est injective *si et seulement* si $\ker(f) = \{e_G\}$.

Remarque :

En pratique pour montrer qu'un morphisme de groupes f entre $(G,.)$ et $(G',*)$ est injective, il suffit de montrer que :

$$\forall x \in G : f(x) = e_{G'} \Rightarrow x = e_G$$

Anneaux et corps.

Dans toute cette partie, A est un ensemble muni de deux L.C.I + et ., on a les définitions suivantes :

- . est distributive par rapport à + *si et seulement si* :

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad : x.(y+z) = x.y + x.z \text{ et } (y+z).x = y.x + z.x$$

- On dit que $(A,+,.)$ est un anneau si et seulement si :

$$\begin{cases} (A,+) \text{ groupe abélien } (+ \text{ est commutatif}) \\ . \text{ est distributive par rapport à } + \\ . \text{ admet un élément neutre qu'on notera } 1_A \end{cases}$$

  L'élément neutre de A pour la 1 ère loi + est en général noté 0_A.

- Si $(A,+,.)$ est un anneau, une partie B de A est dite sous-anneau de A si elle vérifie :

$$\begin{cases} 0_A \in B \\ \forall (x,y) \in B^2 \text{ on a } x - y \in B \text{ et } x.y \in B \end{cases}$$

- On dit que $(A,+,.)$ est corps si et seulement si :

$$\begin{cases} (A,+,.) \text{ anneau commutatif } (. \text{ est commutatif}) \\ 0_A \neq 1_A \\ \text{Tout élément de } A \text{ différent de } 0_A \\ \text{ est inversible pour la 2ème loi .} \end{cases}$$

- Si $(A,+,.)$ est un corps, une partie B de A est dite sous-corps de A si elle vérifie :

$$\begin{cases} 0_A \in B \\ \forall (x,y) \in B^2 \text{ on a } x - y \in B \text{ et } x.y^{-1} \in B \end{cases}$$

Dans tout la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$, et en général sauf mention du contraire, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$ et E un ensemble non vide.

Structure d'espace vectoriel :

Loi de composition interne :

Définition :

Une LCE sur E à base dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une application : $\varphi :: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$.

Définition :

E sera dit un $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE . à base dans $\mathbb{K}$ et qui vérifient les axiomes suivants :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par 0_E.
   $\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a les propriétés suivantes :
2. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.
3. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.
4. $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.
5. $1.x = x$.

Dans toute la suite du chapitre E est muni d'une structure d'un $\mathbb{K}$-ev,

Règles de calcul :

Proposition :

$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ on a les règles de calculs suivants :

1. $0.x = 0_E$.
2. $\alpha.0_E = 0_E$.
3. $(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$.

Structure de sous-espace vectoriel :

Définition :

Une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si et seulement si l elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $0_E \in F$.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois, interne et externe.

Structure d'algèbre :

Définition :

On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux LCI $+, \times$ et d'une LCE,., telle que :

1. $(A, +, .)$ soit un $\mathbb{K}$-ev
2. $(A, +, \times)$ soit un anneau.
3. $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition :

Une partie F sera dite sous-algèbre de E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $0_E \in F$.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F$ et $x \times y \in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois internes et celle externe.

Applications linéaires

Définition :

Soit F un autre $\mathbb{K}$-ev et $u : E \longrightarrow F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a : } u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclus dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclus dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

1. $u(0_E) = 0_F$.
2. L'image directe et celle réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel.
3. $\ker u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.
4. u est injective si et seulement si l $\ker u = \{0_E\}$.
5. $\mathrm{Im} u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.
6. u est surjective si et seulement si l $\mathrm{Im} u = F$.
7. $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.
8. La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
9. La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle *le groupe linéaire de* E.

FIN