Développements Limités

Vocabulaire

- On dit que $f = o(u^n)$ au voisinage de 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{0} \dfrac{f(u)}{u^n} = 0$.
- On dit que f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\exists (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ tel qu $a_0 + a_1 u + \dots a_n u^n + o(u^n)$, qu'on notera en abréviation $DL_n(0)$.
- Si f est continue en 0, son $DL_0(0)$ est $f(u) = f(0) + o(1)$.
- Si f est dérivable en 0, son $DL_1(0)$ est $f(u) = f(0) + f'(0)u + o(u)$.
- Pour tout $a \neq 0$, le $DL_n(a)$ de f s'obtient en faisant à partir du $DL_0(0)$ de la fonction $g(u) = f(a+u)$ où $u = x - a$.
- Si $n \leqslant m$, le $DL_n(0)$ s'obtient à partir du $DL_m(0)$ en éliminant dans celui–ci les puissances qui dépassent n, on dit qu'on a tronqué à l'ordre n.
- La partie principale d'une fonction au voisinage de 0 est par définition la plus petite puissance, munie de son coefficient, qui apparaît dans tous les $DL_n(0)$ possibles.
- On dit que f admet un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de ∞, $DAS_n(\infty)$ si et seulement si la fonction $g(u) = f(\dfrac{1}{x})$ où $u = \dfrac{1}{x}$ admet un $DL_n(0)$, ce $DL_n(0)$ de g est par définition le $DAS_n(\infty)$ de f.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0, alors elle y admet un $DL_n(0)$ obtenu à l'aide de la formule suivante dite de *Taylor–Young*.

  $$f(u) = f(0) + f'(0)u + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n + o(u^n)$$

Opération sur les $DL_n(0)$

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$, on a les propriétés suivantes :

- **Somme** :Le $DL_n(0)$ de $f+g$ est obtenu en faisant la somme de celui de f avec celui de g.
- **Produit** : Le $DL_n(0)$ de fg est obtenu en faisant le produit de celui de f avec celui de g, mais en tronquant à l'ordre n.
- **Dérivée** : Le $DL_n(0)$ de f' est obtenu en dérivant le $DL_{n+1}(0)$ de f.
- **Primitive** : Le $DL_n(0)$ de toute primitive F de f est obtenu en intégrant le $DL_{n-1}(0)$ de f et en ajoutant la constante $F(0)$.
- **Quotient** : Si le $DL_n(0)$ de f est $f(u) = a_0 + a_1 u + \dots a_n u^n + o(u^n)$ et si $a_0 \neq 0$, alors le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{f}$ est obtenu en à partir du $DL_n(0)$ de $g(v) = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1+v}$ où $v = \dfrac{a_1 u + \dots a_n u^n}{a_0}$.
- **Rapport** : Le $DL_n(0)$ de $\dfrac{f}{g}$ est obtenu en faisant le produit de celui de f avec celui de $\dfrac{1}{g}$.
- **Composé** : Si le $DL_n(0)$ de f est $f(u) = a_0 + a_1 u + \dots a_n u^n + o(u^n)$ et si $a_0 = 0$, alors le $DL_n(0)$ de gof est obtenu en remplaçant dans le $DL_n(0)$ de g la variable u par l'expression $a_1 u + \dots a_n u^n$, en tronquant toujours à l'ordre n.

Formules usuelles

Cas généraux.

$DL_n(0)$	$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_n(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{(k)!} x^k + o(x^n)$	$DL_2(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

Cas particuliers.

$DL_3(0)$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_2(0)$	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
$DL_2(0)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$