ENSEMBLES FINIS, DÉNOMBREMENT

Ensembles finis

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que E est* ***fini*** *s'il est en bijection avec un intervalle d'entiers $\mathbb{F}_n$. L'entier n, s'il existe est unique. On l'appelle le* ***cardinal*** *de E. On note Card $E = n$.*

Théorème*.— Cardinal des parties —. Soit E un ensemble fini et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E. Alors

- A est un ensemble fini et Card $A \leq$ Card E,
- $A = E$ *si et seulement si* Card $A =$ Card E.

Proposition*.— Soit E et F des ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Alors

- f est injective *ssi* il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$.
- f est surjective *ssi* il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$.

Corollaire*.— Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble **fini** F.

- L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et Card $f(E) \leq$ Card F.
- Card $f(E) =$ Card F *si et seulement si* f est surjective.

Corollaire*.— Soit f une application d'un ensemble **fini** E vers un ensemble F.

- L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et Card $f(E) \leq$ Card E.
- Card $f(E) =$ Card E *si et seulement si* f est injective.

Théorème*.— Soit E et F des ensembles finis.

- Il existe une injection de E dans F *ssi* Card $E \leq$ Card F
- Il existe une surjection de E sur F *ssi* Card $E \geq$ Card F
- Il existe une bijection de E dans F *ssi* Card $E =$ Card F

Théorème.— Soit E et F deux ensembles **finis** et $f : E \to F$ une application. On suppose que Card $\mathbf{E} =$ Card $\mathbf{F}$. Les assertions suivantes sont **équivalentes**

$\Updownarrow$
- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

Dénombrements

Théorème*.— Opérations élémentaires sur les ensembles finis —. Soit E et F des ensembles finis, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ des parties de E. Alors

- Si E et F sont disjoints, la **réunion disjointe** $E \cup F$ est finie et Card $(E \cup F) =$ Card $E +$ Card F.
- la **réunion** $E \cup F$ est finie et Card $(E \cup F) =$ Card $E +$ Card $F -$ Card $(E \cap F)$.
- le **complémentaire** $\complement_E A$ est fini et Card $(E \setminus A) =$ Card $E -$ Card A
- la **différence** $A \setminus B$ est finie et Card $(A \setminus B) =$ Card $A -$ Card $(A \cap B)$
- le **produit cartésien** $E \times F$ est fini et Card $(E \times F) =$ Card $E \times$ Card F.

Théorème.— Théorème du berger —. Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application surjective de E sur F. On suppose que $(\exists p \in \mathbf{N}^\star)$ $(\forall y \in F)$, $\mathsf{Card}\ \left(\overset{-1}{f}(\{y\})\right) = p$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \ E = p\ \mathsf{Card}\ \ F}$$

Savoir-faire : utiliser le théorème du berger pour dénombrer E et pour dénombrer F.

Théorème.— Applications entre ensembles finis —. Soit E_p et F_n des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors

- L'ensemble F^E de **toutes les applications** de E vers F est fini et $\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ \ F)^{\mathsf{Card}\ E}$.
- L'ensemble $\mathcal{I}(E_p, F_n)$ des **applications injectives** de E_p vers F_n est fini et $\mathsf{Card}\ \mathcal{I}(E_p, F_n) = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, et 0 sinon.
- L'ensemble $\mathcal{B}(E_p, F_n)$ des **applications bijectives** de E_p vers F_n est fini et $\mathsf{Card}\ \mathcal{B}(E_p, F_n) = n!$ si $p \neq n$, et 0 sinon.

Théorème.— Parties d'un ensemble fini —. Soit E_n un ensemble fini de cardinal n. Alors

- L'ensemble $\mathscr{P}(E_n)$ de **toutes les parties** de E_n est fini et $\mathsf{Card}\ \left(\mathscr{P}(E_n)\right) = 2^n$.
- L'ensemble $\mathscr{P}_p(E_n)$ des **parties à** p **éléments** de E_n est fini et $\mathsf{Card}\ \left(\mathscr{P}(E_n)\right) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ et 0 sinon.

▪▪▪ Analyse combinatoire

Soit E_n un ensemble à n éléments. On peut ranger les modèles canoniques dans le tableau suivant :

cardinal	ensemble des
n^p est le nombre de	• tirages successifs avec remise de p éléments de E_n • listes à répétition de p éléments de E_n (ou p-listes d'éléments de E_n) • applications de $\mathbb{F}_p$ dans E_n
A_n^p est le nombre de	• tirages successifs sans remise de p éléments de E_n • listes de p éléments distincts de E_n (ou p-arrangements d'éléments de E_n) • applications injectives de $\mathbb{F}_p$ dans E_n
$\binom{n}{p}$ est le nombre de	• tirages simultanés sans remise de p éléments de E_n • listes strictement croissantes de p éléments de E_n • parties à p éléments de E_n

▪▪▪ Propriétés des coefficients du binôme

Théorème*.— Formule du binôme de Newton —. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

Théorème*.— Pour tous $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Savoir-faire : donner une interprétation ensembliste de ces relations