Ensembles-Applications

Relations binaires

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Jérôme Cardan en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien. Il traverse toute sa vie de douloureuses épreuves. Déjà sa mère avait essayé d'avorter de lui.

Nicolo Fontana (1500-1557)

surnommé Tartaglia, qui signifie le bègue en français, car il perdit sa machoire lors de la guerre alors qu'il avait 12 ans. Autodidacte, Tartaglia s'intéressa non seulement à l'arithmétique, à l'algèbre et à la géométrie mais aussi à la balistique et à la statistique. Cependant il est surtout célèbre pour sa découverte d'une méthode de résolution des équations du 3ème degré. Cette découverte, faite en 1537, fut dévoilée à Cardan en 1539 et c'est celui-ci qui la diffusa. La diffusion de cette méthode engendra un des célèbres conflits mathématiques.

Blaque du jour

- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.

1 Ensembles

Soit A ensemble, A, B, C des parties de E. On écrit alors $A \in \mathcal{P}(E)$ ou $A \subset E$.

- $(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B)$ - $(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B)$
- $(x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A)$ - $(A \setminus B = A \cap \overline{B})$ - $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- **Commutativité** : $A \cap B = B \cap A$ - $A \cup B = B \cup A$ - $A \Delta B = B \Delta A$.
- **Associativité** : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- **Distributivité** : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$.
- **Elément neutre** : $\emptyset \cup A = A$ - $E \cap A = A$ - $\emptyset \Delta A = A$.
- **Boite à outils** : Pour montrer que $A \subset B$ il faut montrer que $x \in A \Rightarrow x \in B$.
  Pour montrer que $A = B$ il faut montrer que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ - $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.
  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$ - $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

2 Applications

Application. Une application $f : E \longrightarrow F$ est bien définie *si et seulement si* :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in E & f(x) \in F \\ \forall (x, x') \in E^2 & x = x' \Rightarrow f(x) = f(x') \end{array}$$

Injection. Une application $f : E \longrightarrow F$ est injective *si et seulement si* :

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

La composée de deux injections est une injection.
Surjection. Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective *si et seulement si* :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

La composée de deux surjections est une injection.
Bijection. Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective (injective et surjective) *si et seulement si* :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

On pose alors $x = f^{-1}(y)$. On définit ainsi une application bijective $f^{-1} : F \longrightarrow E$ appelée application réciproque de f et vérifiant $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.
La composée $f \circ g$ de deux bijections f et g est aussi une bijection. On a en particulier :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Image directe d'une partie. Soit $f : E \longrightarrow F$, A une partie de E et $y \in F$.

$$y \in f(A) \text{ si et seulement si } \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

Propriétés. Soit $f : E \longrightarrow F$, A et B deux parties de E. On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} f(\emptyset) = \emptyset & f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) & f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \end{array}$$

Image réciproque d'une partie. Soit $f : E \longrightarrow F$, A une partie de F et $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(A) \text{ si et seulement si } f(x) \in A.$$

Propriétés. Soit $f : E \longrightarrow F$, A et B deux parties de F. On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) & f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{array}$$

3 Relations binaires.

Dans la suite on suppose $\mathfrak{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

Réflexivité. $\mathfrak{R}$ est dite réflexive *si et seulement si* : $\forall x \in E$ on a : $x\mathfrak{R}x$.

Symetrie. $\mathfrak{R}$ est dite symetrique *si et seulement si* : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$.

Antisymetrie. $\mathfrak{R}$ est dite antisymetrique *si et seulement si* : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $(x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y$.

Relation d'équivalence. $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, symetrique et transitive.

Exemples.

— Dans $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose : $a\mathfrak{R}b$ *si et seulement si* : n divise $a - b$. On dit alors que a est congru à b modulo n et on écrit : $a \equiv b\ [n]$.

— Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\overrightarrow{u}\mathfrak{R}\overrightarrow{v}$ *si et seulement si* : $\exists \lambda > 0$ tel que : $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.

Relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, antisymetrique et transitive.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{N}$, on pose : $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* : $a \leqslant b$. Ordre usuel.
2. Dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* : a divise b.
3. Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si et seulement si* : $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.
4. Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si et seulement si* : $(a < c)$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$. Ordre lexicographique.
5. Dans $\mathcal{P}(E)$, on pose : $A\mathcal{R}B$ *si et seulement si* : $A \subset B$.

Ordre total ou partiel : Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble est dite totale *si et seulement si* : Tous les éléments de E sont comparable entre eux, c'est à dire que : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire c'est à dire quand : $\exists (x,y) \in E^2$ tel que : $x\mathcal{R}y$ fausse et $y\mathcal{R}x$ fausse, dans ce cas on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partielle.

Majorant. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et a et b deux éléments de E, on dit que b est un majorant de a quand $a\mathcal{R}b$, et on dit que b est un majorant d'une partie A de E quand b est un majorant de tous les éléments de A. On dit que la partie A admet un plus grand élément s'il existe un élément de A qui majore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\max A$.

Minorant. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et a et b deux éléments de E, on dit que b est un minorant de a quand $b\mathfrak{R}a$, et on dit que b est un minorant d'une partie A de E quand b est un minorant de tous les éléments de A. On dit que la partie A admet un plus petit élément s'il existe un élément de A qui minore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\min A$.

Fin