# Fractions Rationnelles

**Jeudi 16 Février 2017**

## Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

### Construction de $\mathbb{K}(X)$.

**Rappel** :
Tout anneau intègre, $A$ est contenu dans un corps, le plus petit de ses corps, unique à isomorphisme prés, s'appelle corps des fractions de $A$ et se note $K(A)$, il est construit à l'aide de la relation d'équivalence suivante définie sur $A \times A^*$ par : $(a,b)\mathfrak{R}(c,d) \Leftrightarrow ac - bd = 0$, $K(A)$ est l'ensemble des classes d'équivalences $\overline{(a,b)}$ pour cette relation, chaque classe $\overline{(a,b)}$ est abusivement notée $\dfrac{a}{b}$, Ainsi $K(A) = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ tel que } (a,b) \in A \times A^*\right\}$.

Le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$ se note $\mathbb{K}(X)$ dont les éléments sont de la forme $\dfrac{P}{Q}$ ; où $P$ et $Q$ deux polynômes tels que $Q \neq 0$ et s'appellent des fractions rationnelles. Cette écriture est dite irréductible lorsque $P \wedge Q = 1$.
Toute fraction rationnelle peut s'écrire sous une forme irréductible, il suffit d'y simplifier par le PGCD du numérateur et dénominateur.

### Degré d'une fraction rationnelle.

**Définition :**
Le degré d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est défini à l'aide de la relation : $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$.

### Pôle d'une fraction rationnelle.

**Définition :**
Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ écrite sous sa forme irréductible, les pôles de $F$ sont exactement les racines de $Q$, les multiplicités de ses racines de $Q$ sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle $F$.

**Remarque :**
Pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle il faut avant toute autre chose la simplifier et l'écrire sous sa forme irréductible.

## Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

### Partie entière d'une fraction rationnelle.

**Définition :**
La partie entière d'une fraction rationnelle $F$ est par définition l'unique polynôme noté $E(F)$ vérifiant la propriété : $\deg(F - E(F)) < 0$.

**Remarque :**
Si $F = \dfrac{P}{Q}$ la partie entière de $F$ est exactement le quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$.

## Partie polaire relative à un pôle d'une fraction rationnelle.

### Définition :

La partie polaire relative à un pôle $a$ d'une fraction rationnelle $F$ est par définition l'unique fraction rationnelle notée $F_a$ vérifiant la propriété suivante : $a$ n'est pas un pôle de $F - F_a$.

**Remarque :**
Si $a$ pôle de multiplicité $r$ dans $F$, alors la partie polaire relative à $a$ dans $F$ est de la forme : $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$

## Décomposition en éléments simples.

Toute fraction rationnelle sous décompose en éléments simples de façon unique comme somme de sa partie entière et toutes les parties polaires relatives à ses pôles.

## Remarques utiles.

**Cas d'un unique pôle.** Si $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^r}$ avec $\deg(P) < r$ admet un unique pôle $a$, alors sa décomposition en éléments simples est obtenu à l'aide de *la formule de Taylor* à l'ordre $r-1$ appliquée au polynôme $P$ au point $a$, plus précisément :
$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots \dfrac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X-a)^{r-1} \Rightarrow F(X) = \dfrac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\dfrac{1}{X-a} + \dots \dfrac{P(a)}{(X-a)^r}$.

**Coefficient du plus haut degré dans la partie polaire.** Si $a$ est un pôle de $F$ de multiplicité $r$ dans $F$, alors le coefficient $\lambda_r$ de $\dfrac{1}{(X-a)^r}$ dans la partie polaire de $F$ relative à $a$ est obtenu à l'aide de la formule $\lambda_r = \lim\limits_{X \to a} (X-a)^r F(X)$.

**Cas d'un pôle simple.** Si $a$ est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$ (de multiplicité 1), alors la partie polaire de $F$ relative au pôle $a$ est de la forme $F_a(X) = \dfrac{\lambda}{X-a}$ où $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

**Cas d'un pôle double.** Si $a$ est un pôle double de $F = \dfrac{P}{Q}$ (de multiplicité 2), alors la partie polaire de $F$ relative au pôle $a$ est de la forme :
$F_a(X) = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2}$ où $\mu = \dfrac{2P(a)}{Q''(a)}; \lambda = \dfrac{2}{3}\dfrac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}$.

**Cas d'un pôle imaginaire d'une fraction rationnelle réelle.** Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ (à coefficients réels) et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ un pôle de $F$ de partie polaire dans $F$ égale à $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$, alors $\overline{a}$ est aussi un pôle de $F$ de même multiplicité que $a$ et dont la partie polaire dans $F$ est exactement :
$F_{\overline{a}}(X) = \overline{F_a}(X) = \dfrac{\overline{\lambda_1}}{X-\overline{a}} + \dfrac{\overline{\lambda_2}}{(X-\overline{a})^2} + \dots \dfrac{\overline{\lambda_r}}{(X-\overline{a})^r}$.

**Cas d'une fraction rationnelle paire ou impaire.** Soit $F$ une fraction rationnelle paire ou impaire et $a$ un pôle de $F$ de partie polaire dans $F$ égale à $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$, alors $-a$ est aussi un pôle de $F$ de même multiplicité que $a$ et dont la partie polaire dans $F$ est :

- Si $F$ paire, $F_{-a}(X) = \dfrac{-\lambda_1}{X+a} + \dfrac{\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots \dfrac{(-1)^r\lambda_r}{(X+a)^r}$.
- Si $F$ impaire, $F_{-a}(X) = \dfrac{\lambda_1}{X+a} + \dfrac{-\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots \dfrac{(-1)^{r+1}\lambda_r}{(X+a)^r}$.

**Cas d'une fraction rationnelle de la forme $F = \dfrac{P'}{P}$.** Si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont les racine de $P$ de multiplicité $\alpha_i$, alors : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{\alpha_i}{X-a_i}$.