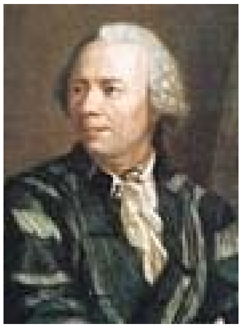
Nombres Complexes

Blague du jour :
La vie est complexe, elle a une partie réelle et une autre imaginaire.

Mathématicien du jour : Euler
Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et un physicien suisse. Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de son travail durant cette période. Euler fut profondément pieux pendant toute sa vie, il répondait souvent cette anecdote : $e^{2i\pi}+1=0$, donc Dieu existe. Certains scientifiques ont appelé cette identité la « formule la plus remarquable du monde ». Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* en 1739 qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musique ; une biographie commente que le travail est destiné « à des musiciens trop avancés dans leurs mathématiques et à des mathématiciens trop musicaux ». Dans les sciences économiques, il prouve que si chaque facteur de production est payé à la valeur de son produit marginal, alors (sous des rendements à l'échelle constants) le revenu total et le rendement seront complètement épuisés.



1 Historique.

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIXème siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3ème degré. Le premier à avoir résolu des équations du 3ème degré du type $x^3+px=q$ avec $(p>0, q>0)$ semble être Scipione Del Ferro (1465 - 1526), professeur à l'université de Bologne. Il ne publia pas sa découverte mais la transmit à son élève Antonio Maria Fior. En 1531, Tartaglia (1500 - 1557), soit à la lumière d'une indiscrétion, soit par sa propre invention, apprit également à résoudre les équations du 3ème degré. Croyant à une imposture, Fior lança un défi public à Tartaglia. A la fin du temps imparti, Tartaglia avait résolu toutes les équations de Fior, alors que celui ci n'avait résolu qu'une seule équation de Tartaglia. La supériorité de Tartaglia provient du fait que ce dernier savait résoudre les

équations du type $x^3+px^2=q$, chose que Fior ne savait pas faire. En 1539, Tartaglia accepta de dévoiler son secret à Cardan (1501 - 1576) qui le publia peu après, malgré la colère de Tartaglia. Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522 - 1565), parvint à résoudre les équations du 4ème degré. Signalons qu'on ne peut résoudre n'importe quelle équation algébrique par radicaux. C'est impossible pour la plupart des équations du 5ème degré, par exemple $x^5+x-a=0$, avec $a=3,4,5,7,8,9,10,11...$

Bombelli fut le premier à introduire une notation proche de notre notation moderne. Mais l'utilisation des nombres imaginaires a mis plusieurs siècles avant de s'imposer. Girard (1595-1632) déclare : ***De quelle utilité sont ces solutions impossibles1 ? Je réponds : pour trois choses. Pour la certitude des règles générales, pour leur utilité, et parce qu'il n'y a pas d'autres solutions.***

Il faut attendre le XIXème siècle pour que les nombres imaginaires soient universellement adoptés. La représentation géométrique des nombres complexes par les points du plan joue un grand rôle dans cette acceptation.

En 1798, Wessel qui est arpenteur, introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe réel. Il note ϵ pour $\sqrt{-1}$, et interprète les vecteurs du plan comme des nombres complexes.

Argand, quant à lui, interprète en 1806 les nombres négatifs comme ayant une direction opposé aux nombres positifs.

Les complexes prendront définitivement leur statut moderne grâce à l'influence de Gauss, dont le renom dépasse de loin celui des précédents personnages. Déjà en 1799, Gauss utilise implicitement le plan complexe dans sa thèse. En 1811, il écrit : ***De même qu'on peut se représenter le domaine entier de toutes les quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même, on peut se figurer le domaine entier de toutes les quantités, les quantités réelles et imaginaires au moyen d'un plan indéfini où tout point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente pour ainsi dire la quantité a + bi.***

Et en 1831 :

Si le point de vue que l'on avait de ce sujet était jusqu'à présent mauvais, et donc enveloppé de mystère et d'obscurité, c'est largement en raison d'une terminologie inadaptée qui aurait due être blâmée. Si, au lieu d'unité positive, négative et imaginaire ou pire encore impossible l'on avait nommé +1, -1 et $\sqrt{-1}$, disons, unité directe, inverse et latérale, on aurait à peine vu paraître une telle obscurité.

ou encore :

Aussi longtemps que les quantités imaginaires étaient basées sur la fiction, elles n'étaient pas pleinement acceptées en mathématiques, mais plutôt regardées comme quelque chose que l'on devait tolérer ; elles étaient loin d'avoir acquis le même statut que les quantités réelles. Il n'y a plus aucune justification à une telle discrimination, maintenant que la métaphysique des nombres imaginaires a été pleinement éclairée, et qu'il a été montré qu'ils avaient une signification aussi réelle que les nombres négatifs.

C'est à partir de cette époque que Gauss emploie le terme "complexe" en lieu et place du terme "imaginaire". C'est également au cours du XIXème siècle que les nombres complexes commencent à être largement utilisés en physique.

2 Généralités.

2.1 Partie réelle et imaginaire d'un complexes.

$z\in\mathbb{C}\Longleftrightarrow z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $i^2=-1$, x s'appelle la partie réelle de z et se note $\mathcal{R}e(z)$, y s'appelle la partie imaginaire de z et se note $\mathcal{I}m(z)$. On a les résultats suivants :

$\mathcal{R}e(z+z')=\mathcal{R}e(z)+\mathcal{R}e(z')$	$\mathcal{R}e(z)=0\Longleftrightarrow z\in i\mathbb{R}$
$\mathcal{I}m(z+z')=\mathcal{I}m(z)+\mathcal{I}m(z')$	$\mathcal{I}m(z)=0\Longleftrightarrow z\in\mathbb{R}$

2.2 Conjugué d'un complexe.

$\overline{z} = x - iy$ **s'appelle le conjugué de** z**. On a :** $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$**.**

$\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$	$\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$	$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$	$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

2.3 Module d'un complexe.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **s'appelle module de** z**. on a :** $|z| = |\overline{z}|$**.**

$\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$	$\lvert z\rvert = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$ **Inégalité triangulaire**

3 Groupe des unités.

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}$ **tel que** $|z| = 1\}$ **est un sous groupe de** $(\mathbb{C}^*, \times)$**, appelé groupe des unités.**
$|z| = 1 \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$**, en particulier**

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$	
Formules d'Euler :	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ **et** $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre :	$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$
$e^{i\varphi} + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi+\theta}{2}}$	$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
$e^{i\varphi} - e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi+\theta}{2}}$	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

En posant $t = \tan\frac{\theta}{2}$**, on a les formules suivantes :**

$\cos\theta = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\sin\theta = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
$\tan\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2}$	$z = x + iy \in \mathcal{C}(0, 1)$ **avec** $z \neq -1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

4 Arguments d'un complexe non nul.

On a $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc s'ecrit sous la forme $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, c'est à dire $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ cette écriture s'appelle forme trigonométrique de z, les réels θ satisfaisant cette relation s'appellent des argument de z et se notent arg(z), ils sont tous égaux modulo 2π.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$	$\arg(\overline{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$	$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

5 Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité tout complexe vérifiant l'équation $z^n = 1$, il y'en a exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité qui s'écrivent sous la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, et constituent un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ qu'on note $\mathbb{U}_n$.

6 Complexes et géometrie plane.

6.1 Affixes et images.

Soit $z = x + iy$ et $M = (x, y)$, z s'appelle affixe de M et M s'appelle l'image de z, on note alors $M(z)$.
Si $M(z)$ et $M'(z')$ alors $d(M, M') = |z - z'|$.
La transformation $z \mapsto \overline{z}$ est la symetrie d'axe (oy).
La transformation $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ où $B(b)$.
$|z - a| = R \Longleftrightarrow M(z) \in \mathcal{C}(A(a), R)$. ***(Cercle)***
$|z - a| \leq R \Longleftrightarrow M(z) \in \mathcal{D}(A(a), R)$. ***(Disque)***

6.2 Propriétés.

Si $A(a), B(b), C(c)$, alors :
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.
- A, B, C **alignés** $\Longleftrightarrow \arg(c-a) \equiv \arg(b-a)\ [\pi]$.
- $AB \perp AC \Longleftrightarrow \arg(c-a) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(b-a)\ [\pi]$.
- **4 points $M_i(z_i)$ avec $1 \leq i \leq 4$ sont cocycliques ou alignés *si et seulement* leur birapport $\dfrac{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}{\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}}$ est un nombre réel.**
- **La transformation $z \mapsto az$ est la composée de la rotation de centre l'origine et d'angle arg(a) avec l'homothétie de centre l'origine et de rapport $|a|$.**

6.3 Théorème de l'angle au centre.

Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points distincts d'un cercle $C(\Omega(\omega), R)$, alors

$$\widehat{B\Omega C} = 2\left(\widehat{BAC}\right)$$

En particulier, quatre points non alignés (A, B, C, D) sont cocycliques *si et seulement si* $(\widehat{CA, CB}) = (\widehat{DA, DB})$.