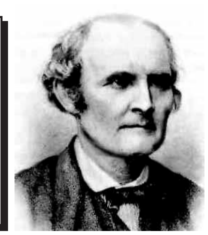
Déterminants

Blague du jour :
C'est un gars énorme qui frappe à la porte du chef du personnel d'une entreprise de bûcherons, car il cherche du travail
- Vous avez l'air costaud. Vous avez des références ?
- Ouais ! J'ai travaillé au Sahara !
- Vous vous foutez de ma gueule ? Y'a pas d'arbres au Sahara !
- Si Monsieur, mains Y'EN A PLUS ! ! !

Mathématicien du jour ***Cayley.***
Arthur Cayley (1821 - 1895) est un mathématicien britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il était d'abord avocat pendant 14 ans, puis professeur à Cambridge. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a reçu le prix Smith, la Royal Medal et la Médaille Copley. On lui doit la découverte des octonions.



1 Introduction historique.

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIXe siècle. Il fut introduit par Cardan en 1545 sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. plus de cent ans plus tard, curieusement le japonais Kowa Seki et l'allemand Leibniz donnèrent presque simultanément les régles de calculs pour les taille 3 et 4.
Gauss utilise pour la première fois le mot *descriminant*, puis Cauchy celui de *déterminant*. Le cadre matriciel est introduit par les travaux de Cayley et Sylvester qui inventent la notation des déterminants par des barres verticales

2 Groupes symétriques.

Définition 1 . Permutaion :
On appelle permutation de $[|1, n|]$ toute bijection : $\sigma : [|1, n|] \to [|1, n|]$. L'ensemble de ces permutaions se note $\mathcal{S}_n$, muni de la loi o est un groupe non abélien de cardinal $n!$, appellé groupe symétrique d'ordre n.

Définition 2 . Support :
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle support de σ, l'ensemble $\text{supp}(\sigma) = \{k \in [|1, n|] \text{ tel que } \sigma(k) \neq k\}$.

Définition 3 . Transposition :
On appelle transposition toute permutation dont le support est formé par deux éléments. Dans ce cas si $\text{supp}(\sigma) = \{i, j\}$ alors $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$, on note alors $\sigma = (i \quad j)$ et on a : $\sigma^2 = id_{[|1,n|]}$.

Définition 4 . p-cycles :
On dit que σ est un p-cycle si $\exists(i_1, i_2, \dots, i_p) \in [|1,n|]^p$ tel que supp$(\sigma) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ avec $\sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \forall 1 \leq k \leq p-1$ et $\sigma(i_p) = i_1$.

Notation :
Dans ce cas on écrit $\sigma = (i_1 \quad i_2, \dots i_p)$ et on a : $\sigma^p = id_{[|1,n|]}$.

Remarque 1 .
- **Notez bien que les transpostions sont des 2-cycles.**
- **$(i_1 \quad i_2, \dots i_p) = (i_1 \quad i_2)(i_2 \quad i_3)\dots(i_{p-1} \quad i_p)$. C'est à dire que tout p-cycle peut s'écrire comme produit de $p-1$ transposions.**

Théorème 1 .
Toute permutation peut s'écrire comme produit de p-cycles. On dit que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les p-cycles.

Corollaire 1 .
Toute permutation peut s'écrire comme produit de transposition. On dit que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

Définition 5 . Inversion :
On appelle inversion de σ, tout couple $(i,j) \in [|1,n|]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition 6 . Signature : On appelle signature de σ, noté $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, définie par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Nombre d'inversions de } \sigma}$$

Remarque 2 .
La signature définit un morphisme de group entre $(\mathcal{S}_n, o)$ et $(\{-1,1\}\times)$, c'est à dire que $\forall(\sigma,\tau) \in \mathcal{S}_n^2$ on a : $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Théorème 2 . la signature d'une transposition est toujours -1.

Théorème 3 .
la signature d'un p-cycle est toujours $(-1)^p$.

Théorème 4 . On appelle permutation paire toute permutation de signature 1.

Définition 7 . Groupe alterné :
L'ensemble des pemutations paires se note $\mathcal{A}_n$, c'est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, de cardinal $\dfrac{n!}{2}$, on l'appelle groupe alterné d'ordre n.

Théorème 5 .
Toute permutation paire peut s'écrire comme produit de 3-cycles. On dit que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

3 Formes n-linéaires.

3.1 Formes bilinéaires.

Définition 8 On appelle forme bilinéaire sur E, toute application $\begin{array}{rccl} \varphi: & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ linéaire par rapport à l'une des variables fixant l'autre, autrement dit :

$$\varphi(x_1+\lambda x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\lambda\varphi(x_2,y)$$
$$\varphi(x,y_1+\lambda y_2)=\varphi(x,y_1)+\lambda\varphi(x,y_2)$$

Proposition 1 .
Soit φ une forme bilinéaire sur E, $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants :
- $\varphi(\lambda x,\mu y)=\lambda\mu\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y)=0$ si $x=0_E$ ou $y=0_E$.

Vocabulaire.
Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que :
- φ est symétrique si et seulement si $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)\quad\forall(x,y)\in E^2$.
- φ est antisymétrique ou bien alternée si et seulement si $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)\quad\forall(x,y)\in E^2$.

Propriétés.
Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x,x)=0$.
- $\varphi(x,y+\lambda x)=\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y)=0$ si $\{x,y\}$ est liée.

Théorème 6 .
Toutes les formes bilinéaires alternées sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension 2 sont proprtionnelles.

3.2 Formes n-linéaires.

Définition 9 .
On appelle forme n-linéaire sur E, toute application $\begin{array}{rccl} \varphi: & \underbrace{E\times\ldots\times E}_{n\text{ fois}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \varphi((x_1,\ldots,x_n)) \end{array}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables en fixant les autres, autrement dit :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i,y_2,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(x_i,y_2,\ldots,y_n)$$
Linéarité par rapport à la première variable
$$\varphi\left(y_1,\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i,y_3,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1x_i,y_3,\ldots,y_n)$$
Linéarité par rapport à la deuxième variable
$$\varphi\left(y_1,\ldots,y_{n-1},\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1},x_i)$$
Linéarité par rapport à la dernière variable

Proposition 2 .
Soit φ une forme n-linéaire sur E, $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a les résultats suivants :
- $\varphi(\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n)=\prod_{i=1}^n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ si l'un des x_i est nul.

Proposition 3 .
Soit φ une forme n-linéaire sur E, on dit que :
- **φ est symétrique si et seulement si :**
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\varphi(x_1,\dots,x_n) \quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.
- **φ est antisymétrique si et seulement si**
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n) \quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.
- $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=-\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$,
  $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n, \forall 1\leq i\neq j\leq n$.

Proposition 4 .
Soit φ une forme bilinéaire, alors φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Proposition 5 .
Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$ **si** $\exists i\neq j$ **tel que** $x_i=x_j$.
- $\varphi\left(x_1,\dots,x_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$ **si** $\{x_1,\dots,x_n\}$ **est liée.**

Théorème 7 .
Toutes les formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n sont proprtionnelles.

4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

Définition 10 .
Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E=n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, l'unique forme n-linéaire alternée définie sur E^n notée $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation suivante : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1$

Proposition 6 .
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que card$\mathcal{B}'=\dim E$, on a les résultats suivants :
- **$\mathcal{B}'$ est liée si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=0$.
- **$\mathcal{B}'$ est libre si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\neq 0$.
- **$\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\neq 0$, **et dans ce cas on a :**

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})=\frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

5 Orientation d'un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension finie.

Orienter E revient à se fixer une base $\mathcal{B}_0$, toute autre base $\mathcal{B}$ est dite directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})>0$, dans le cas contraire c'est à dire si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})<0$ elle est dite indirecte.
En général les bases canoniques sont directes et orientent l' espace vectoriel .
Équation d'une droite du plan.
Si D est la droite du plan passant par le point A est dirigée par le vecteur $\vec{u}$, alors son équation s'obtient à l'aide da la relation suivante :
$M\in D \iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{AM},\vec{u})=0$ **où** $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$ **la base canonique de** $\mathbb{R}^2$.

6 Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 11 .
Soit $u : E \longrightarrow E$ **un endomorphisme, alors** $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ **ne dépond pas du choix de la base** $\mathcal{B}$ **de** E**, on pose alors** $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ **et on l'appelle le déterminant de** u**.**

Proposition 7 . Soit $u, v : E \longrightarrow E$ **deux endomorphismes de** E **tel que** $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ **une base de** E **et** $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ **famille d'élements de** E**, on a les résultats suivants :**
- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
- u **est un automorphisme de** E **si et seulement si** $\det(u) \neq 0$**, avec** $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

7 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n.

Définition 12 . Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n,
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, noté** $\det(A)$ **est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de** $\mathbb{K}^n$**.**

Notation.
Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$**, son déterminant se note aussi** $|a_{i,j}|$.

Propriétés :

- **Si** E **est un** $\mathbb{K}$**-ev de dimension finie, de base** $\mathcal{B}$ **et** u **un endomorphisme de** E**, alors :** $\det u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.
- $\det(I_n) = 1$.
- **Soit** $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$**, alors** $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
- **Soit** $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ **alors** $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \le j \le n$ **où** $A_{i,j}$ **est la matrice obtenue en enlevant la** i**–ème ligne et** j**–ème colonne,** $\det(A_{i,j})$ **s'appelle cofacteur d'indice** (i,j)**, la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de** A **et se note** $Com(A)$**. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la** j**–ème colonne.**
- **Si** $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ **alors** $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \le i \le n$**. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la** j**–ème colonne.**
- **Si** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$ **sont deux bases de** E**, alors** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ **où** P **est la matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **vers** $\mathcal{B}'$**.**
- $A = (a_{i,j})$ **est inversible si et seulement si** $\det(A) \neq 0$ **et dans ce cas :**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}Com(A)$$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Si** P **est inversible alors** $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.
- λ **est une valeur propre de** A **si et seulement si** λ **racine du polynôme** $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$**, appelé polynôme caractéristique de** A**.**
- A **est diagonalisable si et seulement si** $\dim\ker(A - \lambda I_n) = multiplicite(\lambda, \chi_A)$**,** $\forall\lambda$ **valeur propre de** A**.**
- **Toute matrice qui admet** n **valeurs propres distinctes dans** $\mathbb{K}$ **est diagonalisable dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**.**

Fin
à la prochaine