

RÉSUMÉ DE COURS : *Espaces vectoriels*

PARTIE I : *Généralités*

Résumé de Cours

2016-2017

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne un sous corps de \mathbb{C} , et en général sauf mention du contraire, \mathbb{Q} ou \mathbb{R} ou bien \mathbb{C} et E un ensemble non vide.

1 Vocabulaire :

1.1 Loi de composition interne :

Définition 1. Une LCE sur E à base dans \mathbb{K} est la donnée d'une application : $\varphi : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$.
 $(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$

1.2 Structure d'espace vectoriel :

Définition 2. E sera dit un \mathbb{K} -ev s'il est muni d'une LCI + et d'une LCE . à base dans \mathbb{K} et qui vérifient les axiomes suivants :

- 1) $(E, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par 0_E .
 $\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a les propriétés suivantes :
- 2) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.
- 3) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.
- 4) $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.
- 5) $1.x = x$.

Dans toute la suite du chapitre E est muni d'une structure d'un \mathbb{K} -ev,

1.3 Règles de calcul :

Proposition 1. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ on a les règles de calculs suivants :

- 1) $0.x = 0_E$.
- 2) $\alpha.0_E = 0_E$.
- 3) $(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$.

1.4 Structure de sous-espace vectoriel :

Définition 3. Une partie F de E est dite sous espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) $0_E \in F$.
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois, interne et externe.

Remarque :

Tout sous espace vectoriel de E est lui même un espace vectoriel , et tout espace vectoriel inclu dans E est un sous espace vectoriel de E , ainsi pour mon montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est judicieux de montrer que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

1.5 Structure d'algèbre :

Définition 4. On appelle algèbre sur \mathbb{K} , tout ensemble A muni de deux LCI $+$, \times et d'une LCE, \cdot , telle que :

- 1) $(A, +, \cdot)$ soit un \mathbb{K} -ev
- 2) $(A, +, \times)$ soit un anneau.
- 3) $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition 5. Une partie F sera dite sous-algèbre de E si elle vérifie les propriétés suivantes :

- 1) $0_E \in F$.
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F$ et $x \times y \in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois internes et celle externe.

1.6 Applications linéaires

Définition 6. Soit F un autre \mathbb{K} -ev et $u : E \rightarrow F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a : } u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 2. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

- 1) $u(0_E) = 0_F$.
- 2) L'image directe et celle réciproque d'un sous espace vectoriel est aussi un sous espace vectoriel .
- 3) $\ker u = \{x \in E \text{ tel que : } u(x) = 0_F\}$ est un sous espace vectoriel de E , on l'appelle noyau de u .
- 4) u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.
- 5) $Im u = u(E)$ est un sous espace vectoriel de F , on l'appelle image de u .
- 6) u est surjective si et seulement si $Im u = F$.
- 7) $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.
- 8) La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \cdot, \circ)$ est une algèbre sur \mathbb{K} .
- 9) La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire de E .

2 Projecteurs :

2.1 Somme de deux sous espace vectoriel d'un espace vectoriel :

Définition 7. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espace vectoriel de E , la somme de F et G est le sous espace vectoriel de E noté $F + G$ défini par $F + G = \{x = x_1 + x_2 \text{ tel que } : x_1 \in F, x_2 \in G\}$.

Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note plutôt par $F \oplus G$.

Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E , et dans ce cas $\forall x \in E, \exists !x_1 \in F$ et $\exists !x_2 \in G$ tel que : $x = x_1 + x_2$.

2.2 Projection sur sous espace vectoriel par rapport à un autre :

Définition 8. Si $E = F \oplus G$, soit $x \in E, x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tel que : $x = x_1 + x_2$. x_1 s'appelle la projection de x sur F parallèlement à G et se note $p_{F//G}(x)$ et x_2 s'appelle la projection de x sur G parallèlement à F et se note $p_{G//F}(x)$.

Proposition 3. Avec les notations précédentes l'application :
 $p_{F//G} : E \longrightarrow F$ est linéaire vérifiant les propriétés
 $x \longmapsto x_1 = p_{F//G}(x)$
suivantes :

- 1) $p_{F//G}^2 = p_{F//G}$.
- 2) $\text{Im } p_{F//G} = F, \text{ker } p_{F//G} = G$ en particulier $\text{Im } p_{F//G}$ et $\text{ker } p_{F//G}$ sont supplémentaires dans E .

2.3 Projecteur :

Définition 9. On appelle projecteur sur E , tout endomorphisme, p de E tel que : $p^2 = p$.

Proposition 4. Soit p un projecteur de E , on a les propriétés suivantes :

- 1) $\text{Im } p$ et $\text{ker } p$ sont supplémentaires dans E .
- 2) $x \in \text{Im } p \iff p(x) = x$.
- 3) p est la projection sur son image parallèlement à son noyau.

Conclusion :

Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau.

2.4 Symétries.

Définition 10. On appelle symétrie sur E , tout endomorphisme, s de E tel que : $s^2 = \text{id}_E$.

Proposition 5. Soit s une symétrie de E , on a les propriétés suivantes :

- 1) $p = \frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$ est un projecteur.
- 2) En posant $F = \text{Im } p$ et $G = \text{ker } p$, on a $E = F \oplus G$ avec
 $s(x) = x \quad \forall x \in F$, on dit alors que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .
- 3) Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s = 2p - \text{id}_E$ sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{ker } p$.

3 Familles génératrices, libres, liées et bases

3.1 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Vocabulaire.

Soit E un \mathbb{K} -ev, les éléments de E s'appellent des vecteurs et ceux de \mathbb{K} des scalaires.

Définition 11. Soit E un \mathbb{K} -ev, $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dira que x est une combinaison linéaire de x_k si et seulement si

$$\exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que : } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Proposition 6. .

- 1) L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un sous espace vectoriel de E , qu'on appelle usuellement sous espace vectoriel engendré par les $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et qu'on note $\text{Vect}((x_k)_{1 \leq k \leq n})$. On démontre que c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant la famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$. Par convention on écrit : $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
- 2) Si on pose : $\mathcal{B}_1 = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, \mathcal{B}_2 = (y_k)_{1 \leq k \leq m}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.
- 3) Si $u : E \rightarrow F$ est linéaire, et $\mathcal{B} = ((x_k)_{1 \leq k \leq n})$ famille de vecteurs de E , et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors : $u \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k)$, en particulier $u(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Vect}(u(\mathcal{B}))$.

3.2 Familles génératrices

Définition 12. Une famille \mathcal{B} est dite génératrice de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} , Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de E , il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.

Proposition 7. Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire.

- 1) $u \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k)$, en particulier deux applications linéaires égales sur une famille génératrice sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.
- 2) Si \mathcal{B} famille génératrice de E , alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$, en particulier si u est surjective alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- 3) Si F et G sont deux sous espace vectoriel de E , \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux familles génératrices de F et G respectivement, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de $F + G$.

3.3 Familles liée

Définition 13. Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 8. .

- 1) Toute famille contenant un élément nul est liée.
- 2) Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
- 3) Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.
- 4) L'image par une application linéaire d'une famille liée est aussi liée.

3.4 Familles libre

Définition 14. Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres. En particulier $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre si et seulement si $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$. Et on peut surtout en conclure que si deux combinisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.

Proposition 9. .

- 1) Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
- 2) Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
- 3) Toute famille contenue dans une famille libre est aussi libre.
- 4) L'image par une application linéaire injective d'une famille libre est aussi libre.
- 5) Si F et G sont deux sous espace vectoriel de E tel que : $F \cap G = \{0_E\}$, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux familles libres dans F et G respectivement, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est libre dans $F \oplus G$.

3.5 Bases

Définition 15. On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.

Proposition 10. .

- 1) Si $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de E , alors $\forall x \in E \quad \exists ! (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'appellent coordonnées de x dans la base $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$.
- 2) L'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée.
- 3) Deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.
- 4) Si F et G sont deux sous espace vectoriel de E tel que : $F \cap G = \{0_E\}$, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de F et G respectivement, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $F \oplus G$.

Fin.