My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

# Résumé de cours : *Espaces vectoriels Euclidiens*

**Résumé de Cours**

**2016-2017**

## Table des matières

Dans tout le chapitre $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

# 1 Produit scalaire.

**Définition 1.** *On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme biliéaire définie sur $E \times E$ symétrique définie positive. Autrement dit une application $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
*Bilénaire :*
$< x_1 + \lambda x_2, y >=< x_1, y > +\lambda < x_2, y >, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$< x, y_1 + \lambda y_2 >=< x, y_1 > +\lambda < x, y_2 >, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .
*Symétrique : $< x, y >=< y, x > .\forall (x, y) \in E^2$.*
*Définie : $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0_E$.*
*Positive : $< x, x >\geq 0, \forall x \in E$.*

## 1.1 Norme euclidienne.

On définit alors la norme euclidienne sur $E$ ainsi : pour tout $x \in E$ on pose

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

et on a les propriétés suivantes :$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Inégalité de Cauchy-Scwarz. $|< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité *si et seulement si* $x$ et $y$ sont proportionnels.
$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |< x, y >|$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 |< x, y >|$ .
Identité du parallélogramme. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
Identité de polarisation. $< x, y >= \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$ .
$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
Inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

## 1.2 Distance euclidienne.

On définit alors la distance euclidienne sur $E^2$ ainsi : pour tout $(x, y) \in E^2$ on pose :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On a les propriétés suivantes : $\forall (x, y, z) \in E^3$.
$d(x, x) = 0$
$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Inégalité triangulaire

## 1.3 Vecteurs unitaires.

Ce sont les $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, tout $x \neq 0_E$ peut être normalisé pour obtenir lélement unitaire, $\dfrac{x}{\|x\|}$.

## 1.4 Vecteurs orthognaux.

On dit que deux éléments $(x, y) \in E^2$ sont orthogonaux *si et seulement si* leur produit scalaire est nul, càd : $< x, y >= 0$, on écrit alors : $x \perp y$.
**Propriétés**.
- $0_E \perp x, \forall x \in E$.
- Si $x \perp x$ alors $x = 0_E$.

## 1.5 Sous espaces orthognaux.

Deux sous espace vectoriel $F$ et $G$ de $E$ sont dits orthogonaux *si et seulement si* chaque élément de $F$ est orthogonal à chaque élément de $G$, on écrit alors : $F \perp G$.

## 1.6 Orthogonal d'un sous espace vectoriel .

Soit $F$ un sous espace vectoriel de $E$, l'ensemble des éléments de $E$ orthogonaux à ceux de $F$, noté $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de $E$, appelé l'orthogonal de $F$, notez bien que :
$y \in F^\perp \Leftrightarrow < x, y >= 0, \forall x \in F$.
**Propriétés**.

- $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
- $E^\perp = \{0_E\}$.
- $\{0_E\}^\perp = E$.

### 1.7 Famille orthogonale.

C'est toute famille $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ formée par des éléments deux à deux orthogonaux, càd : $< e_i, e_j >= 0$ si $i \neq j$.
**Théorème de Phytagore**.
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille orthogonale, alors :
$\|e_1 + ... + e_m\|^2 = \|e_1\|^2 + ... + \|e_m\|^2$ .

### 1.8 Famille orthononrmale.

C'est toute famille $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ formée par des éléments unitaires deux à deux orthogonaux, càd : $< e_i, e_j >= \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array}$

**Propriété**.
Toute famille orthonormale est libre.
**Théorème**.
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille orthonormale, alors $\left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2$.

## 2 Espace euclidien.

C'est tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Dans toute la suite on considère $E$ espace vectoriel euclidien de dimension $n$.

### 2.1 Procédé d'orthogonalisation de Gramm-Shmidt.

De toute base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $E$, on peut construire une base orthogonale $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$, en posant :

$$\begin{array}{ll} e'_1 = e_1 & \\ e'_2 = e_2 + \lambda e'_1 & \text{avec } \lambda \text{ obtenue à l'aide de la relation} \\ & < e'_2, e'_1 >= 0 \\ \vdots & . \\ e'_n = e_2 + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1} & \text{avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ obtenues à l'aide} \\ & \text{des relations :} \\ & < e'_n, e'_1 >= \ldots =< e'_n, e'_{n-1} >= 0 \end{array}$$

**Corollaire 1.** *Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale .*

**Théoréme 1.** *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale . $\forall (x, y) \in E^2$, on a les résultats suivants :*

$x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< y, e_i >$ .

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2$ .

**Théoréme 2.** ***Théorème de la base orthonormale incomplète***. *Toute famille orthonormale peut être complétée pour obtenir une base orthonormale .*

**Corollaire 2.** *Soit $F$ un sous espace vectoriel de $E$, alors $F$ et $F^\perp$ sont supplementaire dans $E$, càd :*

$$E = F \oplus F^\perp$$

*En particulier* $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ *et* $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

**Corollaire 3.** *Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to R$, il existe un unique $a \in E$ tel que*
$\varphi(x) =< a, x >, \forall x \in E$.

## 2.2 Produit vectoriel.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, et $(x_i)_{1\leq i\leq n-1} \in E^{n-1}$ famille fixée de $n-1$ éléments, alors l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} E & \to & R \\ x & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_{n-1},x) \end{array}$ est une forme linéaire, il existe donc un unique élément de $E$, noté $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$ et appelé produit vectoriel des $(x_i)_{1\leq i\leq n-1}$ tel que
$\varphi(x) =< x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}, x >, \forall x \in E$, autrement dit :
$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_{n-1},x) =< x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}, x >, \forall x \in E$.

## 2.3 Produit vectoriel en dimension 3.

**Propriétés.**
L'application $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & R^3 \\ (x,y) & \longmapsto & x\wedge y \end{array}$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
$x\wedge y \perp x$ et $x \wedge y \perp y, \forall (x,y) \in E^2$.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors $x\wedge y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

$(u,v,w)$ est une base orthonormale directe de $R^3$ *si et seulement si* $\|u\| = \|v\| = 1, < u, v >= 0$ et $w = u \wedge v$.

# 3 Applications linéaires et espaces euclidiens.

## 3.1 Projection orthogonale.

**Définition 2.** *Une projection $p : E \to E$ est dite orthgonale $E$ si et seulement si $Imp = (Kerp)^{\perp}$.*

**Théoréme 3.** *Soit $p : E \to E$ linéaire, alors $p$ est une projection orthogonale sur $E$ si et seulement si $p^2 = p$ .
$< p(x), y >=< x, p(y) >, \forall (x,y) \in E^2$*

**Théoréme 4.** *Soit $p : E \to E$ linéaire, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de $E$ et $M = \mathcal{M}_B(p)$, alors $p$ est un projection orthogonale si et seulement si $M^2 = M$ et ${}^tM = M$.*

**Théoréme 5.** *Soit $p$ projection orthogonale de rang $r$ et $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ une base orthonormale de Imp, alors $\forall x \in E$ on a : $p(x) = \sum_{i=1}^{r} < x, e_i > e_i$.*

## 3.2 Distance d'un élément $x$ de $E$ à un sous espace vectoriel $F$.

**Définition 3.** *On la note $d(x,F)$ et c'est par définition la plus petite distance de $x$ aux éléments de $F$.*

**Théoréme 6.** *$d(x,F) = d(x, p_F(x))$, où $p_F(x)$ désigne la projection orthogonale de $x$ sur $F$.*

**Corollaire 4.** *Si $\dim F = r$ et $(e_i)_{r+1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de $F^{\perp}$, alors*
$$d(x,F)^2 = \sum_{i=r+1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

## 3.3 Rotations.

Ce sont qui transofoment toute base orthonormale directe de $E$ en une base orthonormale directe de $E$. Leurs déterminat vaut toujours 1.

### 3.4 Symétrie orthogonales.

**Définition 4.** *Ce sont les applications linéaires $s : E \rightarrow E$ telles que $s^2 = \mathrm{id}_E$ dont les sous espaces propres associes sont orthogonaux, i.e : $Ker(s + id_E) = Ker(s - id_E)^{\perp}$.*

**Réflexions**. Ce sont les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, i.e : $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = n - 1$.
**Remarque**. Pour toute réflexion $s$ de $E$ on a : $\det(s) = (-1)^{n-1}$.

### 3.5 Automorphismes orthogonaux.

**Définition 5.** *On appelle automorphisme orthogonal de $E$, toute application linéaire $u : E \rightarrow E$ qui conserve le produit scalaire. càd : $< u(x), u(y) >=< x, y >, \forall (x, y) \in E^2$.*

**Théoréme 7.** *Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes : $u$ conserve le produit scalaire*
*si et seulement si $u$ conserve la norme i.e : $\|u(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$.*
*si et seulement si $u$ conserve la distance i.e : $d(u(x), u(y)) = d(x, y), \forall (x, y) \in E^2$, on dit aussi que c'est un isométrie.*
***Propriété**.*
*L'ensemble des automorphismes orthogonaux est sous-groupe de $GL(E)$, on l'appele le groupe orthogonal et on le note $O(E)$.*
***Théorème**.*
*Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes :*
*$u$ est automorphisme orthogonal de $E$*
*si et seulement si $u$ transofome toute base orthonormale de $E$ en une base orthonormale de $E$. si et seulement si $u$ transofome au moins une base orthonormale de $E$ en une base orthonormale de $E$.*

## 4 Matrices orthogonales.

**Définition 6.** *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des relations suivantes, (qui sont d'ailleurs équivalentes) : $M^t M = I_n$ ou bien $MM^t = I_n$.*

**Propriété**.
L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, on l'appelle le groupe orthogonal d'ordre $n$ et on le note $O(n)$.
**Remarque**.
Si $M \in O(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales directes ($\det(M) = 1$), est un sous–groupe de $O(n)$, on l'appelle le groupe spécial d'ordre $n$ et on le note $SO(n)$.
**Théorème**.
$M \in O(n)$ *si et seulement si* ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire canonique.

**Corollaire 5.** *Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes :*
*$u$ est automorphisme orthogonal de $E$*
*si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale de $E$ en une matrice orthogonale.*
*si et seulement si sa matrice dans au moins une base orthonormale de $E$ en une matrice orthogonale.*

**Corollaire 6.** *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$' deux base orthonormale de $E$, alors $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale, en particulier $P^{-1} = {}^t P$.*

## 5 Automorphismes orthogonaux du plan.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Pour que $M$ soit orthogonale il faut que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, dans ce cas $u$ est soit une rotation $u = r_\theta$ (si $\det M = 1$ ) ou bien symétrie

axiale $u = s_\Delta$ (si $\det M = -1$ ).
Si $\det M = 1$, on trouve $\theta$ à l'aide de la relation $a = \cos\theta, b = \sin\theta$.
Si $\det M = -1$, alors $\Delta$ est la droite faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe $(ox)$, on trouve $\theta$ à l'aide de la relation $a = \cos\theta, b = \sin\theta$.

### 5.1 Propriétés des rotations du plan.

- $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$.
- $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.
- $< x, y >= \|x\| \, \|y\| \cos\theta, \det(x, y) = \|x\| \, \|y\| \sin\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ faisant un angle $\theta$ entre eux.
- Toute rotation du plan d'angle $\theta$ peut être décomposeé en deux réflexions dont les axes font un angle $\frac{\theta}{2}$ entre eux.

- $\det(x, y)$ est égal à la surface du parallélogramme de cotés $x$ et $y$.

## 6 Automorphismes orthogonaux de l'espace.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont respectivement $C_1, C_2, C_3$ pour vérifier que $M$ est une matrice orthogonale il suffit de vérifier que $M$ est orthgonale il suffit de vérifier que $\|C_1\| = \|C_2\| = 1, < C_1, C_2 >=< C_1, C_3 >=< C_2, C_3 >= 0$.

Si $C_1 \wedge C_2 = C_3$, alors $\det M = 1$ et dans ce cas $M$ est la matrice d'une rotation $r_{\Delta,\theta}$ d'axe $\Delta$ et d'angle $\theta$. On trouve $\Delta$ à l'aide du système $MX = X$ et $\theta$ à l'aide des relations $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ et $\sin\theta$ de même signe que $\det(e_1, C_1, a)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ et $a$ vecteur qui dirige l'axe $\Delta$.

### 6.1 Propriétés des rotations de l'espace.

Toute rotation de l'espace se décompose en produit de deux réflexions.
$< x, y >= \|x\| \, \|y\| \cos\theta, \|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ faisant un angle $\theta$ entre eux.
Soit $r$ la rotation d'axe $\Delta$ dirigé par $a$ et d'angle $\theta$, alors $\forall x \perp \Delta$ on a : $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)a \wedge x$.

Fin.