

Table des matières

1	Préliminaires.	1
1.1	Cas d'une fonction continue positive.	1
1.2	Cas d'une fonction réelle continue.	1
1.3	Cas d'une fonction complexe continue.	1
2	Quelques techniques d'intégrabilité.	2
2.1	Étude du prologement par continuité.	2
2.2	Étude de la limite aux bornes de la primitive.	2
2.3	Comparaison à une fonction de référence.	2

1 Préliminaires.

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

1.1 Cas d'une fonction continue positive.

Définition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\int_J f(t) dt \leq M$, pour tout segment $J \subset I$, dans ce cas on pose $\int_I f(t) dt = \sup_J \int_J f(t) dt$.

Proposition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on suppose qu'elle existe une suite de segment $J_n \subset I$ croissante pour l'inclusion telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I \text{ avec } \int_{J_n} f(t) dt \text{ majorée, alors } f \text{ est intégrable sur } I, \text{ avec}$$

$$\int_I f(t) dt = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f(t) dt = \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f(t) dt.$$

1.2 Cas d'une fonction réelle continue.

Définition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables, dans ce cas on pose

$$\int_I f(t) dt = \int_I f^+(t) dt - \int_I f^-(t) dt.$$

Proposition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I .

1.3 Cas d'une fonction complexe continue.

Définition 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on dira que f est intégrable sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables, dans ce cas

$$\text{on pose } \int_I f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_I \operatorname{Im}(f) dt.$$

Proposition 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I .

Proposition 4. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable sur I .
En particulier l'ensemble des fonction intégrables sur I , noté $\ell^{+\infty}(I)$ est un espace vectoriel pour les lois $+$ et \cdot .

Remarque. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue et $c \in]a, b[$, alors f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si elle l'est sur $]a, c[$ et $]c, b[$.
Ainsi l'étude de l'intégrabilité peut se restreindre aux intervalle de la $]a, b[$ ou $[a, b[$.

2 Quelques techniques d'intégrabilité.

2.1 Étude du prologement par continuité.

Théorème 1. Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en b avec $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Remarques.

- Le théorème est encore valable sur les intervalles $]a, b[$ et $[a, b[$ avec a, b réels.
- Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, le théorème n'est pas toujours vrai, comme pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ non intégrable sur $[1, +\infty[$ bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2.2 Étude de la limite aux bornes de la primitive.

Théorème 2. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue positive, telle que $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe et soit finie, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
Et dans ce cas $\int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$

Remarque.

Le théorème est encore vrai sur les intervalles de la forme $]a, b[$ ou $]a, b[$ pour les fonctions continues qui y gardent un signe constant, toute fois il risque d'être faux pour les fonctions qui changent de signe comme pour la fonction

$f(t) = \frac{\sin t}{t}$ sur $[\pi, +\infty[$ qui n'est pas intégrable bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$ existe et soit finie.

Pour ce type de fonction on étudie plutôt $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x |f(t)| dt$, si elle est finie, alors $|f|$ est intégrable donc f aussi, et dans ce cas $\int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$.

Application.

- $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2.3 Comparaison à une fonction de référence.

Théorème 3. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $|f| \leq g$, alors : g intégrable sur $I \implies f$ intégrable sur I .

Corollaire 1. Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $g \leq f \leq h$, si g et h sont intégrables sur I , alors f est aussi intégrable sur I .

Corollaire 2. Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f =_b o(g)$ ou $f =_b O(g)$, si g est intégrable sur I , alors f est aussi intégrable sur I .

Application. Soit f continue, si :

- $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
- $\exists \alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de 0.

Corollaire 3. Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f \sim_b g$, alors : g est intégrable sur $[a, b[$, si et seulement si f est aussi intégrable sur $[a, b[$.

Fin.