

Fonctions Usuelles

La blague du jour.

source : site internet

Alors c'est Logarithme et Exponentielle qui sont dans une fête, Logarithme s'éclate comme une folle, elle se fend la gueule, elle se fait des amis, elle est mega sociable et tout. Exponentielle, elle, est toute triste assise dans son coin, alors logarithme va la voir et lui dit : "bah kesta, t'es toute triste, vient t'amuser avec nous... -bof, tu sais moi, que je m'integre ou que je m'integre pas, le resultat est le meme"

1 Fonctions logarithmiques.

$\forall a > 0, \forall x > 0$ on pose $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, log en base a où \ln désigne le logarithme népérien.

Propriétés. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $x > 0$, on a les propriétés suivantes :

$$- \ln ab = \ln a + \ln b.$$

$$- \ln(a^n) = n \ln a.$$

$$- \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

$$- \ln x' = \frac{1}{x}$$

$$- \int \ln x = x \ln x - x + Cte.$$

2 Fonctions exponentielles.

$\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ on pose : $a^x = e^{x \ln a}$, exponentielle en base a . **Propriétés.** Pour tout $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$- e^{\ln x} = x, \ln e^x = x$$

$$- e^{a+b} = e^a e^b.$$

$$- \frac{1}{e^a} = e^{-a}.$$

$$- (e^a)^n = e^{na}.$$

$$- (e^x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \int e^x = e^x + Cte.$$

3 Fonctions hyperboliques.

Cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose : $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Propriétés. Pour tous réels a, b on a :

- $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$.
- $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$.
- $\operatorname{ch} -a = \operatorname{ch} a$ et $\operatorname{sh} -a = -\operatorname{sh} a$.
- $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b$.
- $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{ch} a \operatorname{sh} a$.
- $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$.

- $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$.
- $\operatorname{th}(2a) = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$.
- $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$.
- $\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.

4 Fonctions circulaires.

- $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$.
- $\tan' x = \frac{1}{\tan^2 x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$.
- $\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.
- (quand les tangentes existent)
- $\cos(a) + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
- $\sin(a) + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$.

Et toutes les autres propriétés peuvent s'en déduire à partir des formules suivantes :

- $\cos(a + \pi) = -\cos a$.
- $\sin(a + \pi) = -\sin a$.
- $\cos(\pi - a) = -\cos a$.
- $\sin(\pi - a) = \sin a$.
- $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$.
- $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a$.
- $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$.
- $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$.

5 Fonctions circulaires réciproques.

- **cos est bijective de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$ dont l'application réciproque est arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ telle que :** $\operatorname{arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$.

$\forall x \in [-1, 1], \cos(\operatorname{arccos} x) = x$.

$\forall \theta \in [0, \pi], \operatorname{arccos}(\cos \theta) = \theta$, mais si $\theta \notin [0, \pi]$ on cherche $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \cos \theta$, dans ce cas $\operatorname{arccos}(\cos \theta) = \alpha$ (plus précisément : $\alpha \equiv \pm \theta [2\pi]$).

- **sin est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$ dont l'application réciproque est arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ telle que :** $\operatorname{arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$.

$\forall x \in [-1, 1], \sin(\operatorname{arcsin} x) = x$.

$\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \operatorname{arcsin}(\sin \theta) = \theta$, mais si $\theta \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on cherche $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin \alpha = \sin \theta$, dans ce cas $\operatorname{arcsin}(\sin \theta) = \alpha$ (plus précisément : $\alpha \equiv \theta$ ou $\pi - \theta [2\pi]$).

tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbb{R} dont l'application réciproque est arctan : $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que : $\operatorname{arctan}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\operatorname{arctan} x) = x$.

$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{arctan}(\tan \theta) = \theta$, mais si $\theta \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on cherche $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan \alpha = \tan \theta$, dans ce cas $\operatorname{arctan}(\tan \theta) = \alpha$ (plus précisément : $\alpha \equiv \theta [\pi]$).