Résumé de cours : *Logie.*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

1 Vocabulaire.

Proposition. C'est une assertion qui ne peut être que vraie ou fausse.

Exemple : El Guerrouj a gagné la course.

Conjecture. C'est toute propriété énoncée par une personne, qui ne la démontre pas, et qu'aucune autre personne n'arrive à en donner un contre-exemple.

Exemple. : Tout nombre pair est somme de deux nombres premiers.

Axiome. C'est une propriété dont l'exactitude est induscutable, et sur laquelle se fonde toute les mathématiques, ou au moins une partie, il y'en a 7 au total dont les plus connus sont Axiome de *Archimède, de la borne supérieure, du choix, de Zorn, de Zermelo,...* et qui sont tous équivalents.

2 Opérations sur les propositions.

Négation. La négation d'une proposition P se note $\rceil P$, elle est toujours de véracité différente que celle de P, c'est à dire que P est vraie *si et seulement si* $\rceil P$ est fausse. Noter bien que : $\rceil\rceil P = P$.

Exemple :$\rceil(x \in \mathbb{R})$ est $x \notin \mathbb{R}$, et $\rceil(a \geq b)$ est $a < b$.

Conjonction. La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition (P et Q) qui est vraie si P et Q sont vraies et qui est fausse si P ou Q est fausse, sa négation est : $\rceil(P$ et $Q) = (\rceil P$ ou $\rceil Q)$.

Exemple : $\rceil(1 \leq x \leq 2)$ est $(1 > x$ ou $x > 2)$.

Disjonction. La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition (P ou Q) qui est vraie si P ou Q est vraie et qui est fausse si P et Q sont fausses, sa négation est : $\rceil(P$ ou $Q) = (\rceil P$ et $\rceil Q)$.

Exemple. $\rceil(x \in A \cup B)$ est $(x \notin A$ et $x \notin B)$.

Implication. C'est la propriété notée $P \Rightarrow Q$ dé finié par ($\rceil P$ ou Q), qui est vraie si P, Q vraies ou si P fausse, P s'appelle hypothèse de l'implication et Q sa conclusion.

- Un raisonnement mathématiques est au fait une succession d'implications correctes.
- Le raisonnemnt par contraposée est l'implication $\rceil Q \Rightarrow \rceil P$ qui n'est autre que l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Le raisonnement par l'absurde est la négation de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Equivalence : C'est la propriété notée $P \Leftrightarrow Q$ définié par ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$).

3 Quantificateurs.

Ce sont des symboles qui traduisent la quantité il y'en a 3 : $\forall$ (quelquesoit), $\exists$ (il existe au moins un), $\exists!$ (il existe un et un seul). Noter bien les négations suivantes :

$\rceil(\forall x$ qui verifie P on a Q est vraie) est : ($\exists x$ qui verifie P tel que $\rceil Q$ vraie).

$\rceil(\exists x$ qui verifie P on a Q est vraie) est : ($\forall x$ qui verifie P tel que $\rceil Q$ vraie).

Fin.