My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Résumé de cours : *Systèmes linéaires.*

Résumé de Cours

2016-2017

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle système linéaire à n équation et p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système d'équations de la forme

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Un tel système peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = b$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice du système, $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ s'appelle son second membres, et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ sont les inconnues.
Le système est dit compatible *si et seulement si* il admet des solutions. On a alors le résultat suivant :
$(\mathcal{S})$ est compatible *si et seulement si* $b \in \mathrm{Im}(A)$ *si et seulement si* b est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A, au fait résoudre $(\mathcal{S})$ revient à chercher les coefficients de cette combinaison linéaire.
Le système $AX = 0$ s'appelle système homogène, ou sans second membre, son ensemble de solutions est exactement le $\mathbb{K}$-ev $\ker(A)$ de dimension $p - r$ où $r = rg(A)$.
L'ensemble de solutions du système $(\mathcal{S})$ est exactement $X_0 + \ker(A)$, où X_0 est une solution particulière, autrement dit : toute solution X de l'équation $AX = b$ s'écrit sous la forme $X = X_0 + X_1$ où X_0 est une solution particulière et $X_1 \in \ker(A)$.
Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors toutes les inconnues s'écrivent seulement en fonction de $p - r$ inconnues appelées inconnues principales
Le systéme est dit de Crammer lorsque la matrice A est carrée inversible, c'est à dire $n = p = r$, dans ce cas il a admet une unique solution $X = A^{-1}b$.
Il est possible d'inverser la matrice A, en résolvant le systéme $AX = Y$ et exprimer les coefficients de X en fonction de ceux de Y ce qui donnera le système $BY = X$, on a alors $B = A^{-1}$.
Si A est inversible, alors l'une solution $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ du système $AX = b$ s'obtient à l'aide des formules suivantes : $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A la i–ème colonne par le second membre b.

Fin.