My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

# Ensembles-Applications Niveau 2

## Ensembles

**Exercice 1 :** Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Les assertions suivantes ont-elles un sens ?

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $a \in E$ | **3.** $a \subset E$ | **1.** $\{a\} \in E$ |
| **2.** $\emptyset \subset E$ | **4.** $\emptyset \in E$ | **2.** $\{\emptyset\} \subset E$ |

**Exercice 2 :** Soit $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble non vide $E$. Démontrez que

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \complement_E B \subset \complement_E A.$$

**Exercice 3 :** Soient $A$ et $B$ des parties d'un ensemble $E$. Démontrez que

$$A = B \textit{ si et seulement si } A \cup B = A \cap B.$$

**Exercice 4 :** Soient $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble $E$.

**1.** Exprimez les fonctions indicatrices de $A \cap B$, $\complement_E A$ et de $A \setminus B$ à l'aide de $1\!\!1_A$ et $1\!\!1_B$. En déduire les indicatrices de $A \cup B$ et de $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

**2.** Démontrez que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

**3.** Démontrez que pour toute partie $A$ de $E$, il existe une unique partie $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $A\Delta X = \emptyset$.

## Applications injectives, surjectives, bijectives

**Exercice 5 :** Soient $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrez que

**1. Si** $h$ est surjective et $g$ est injective, **alors** $f$ est surjective.

**2. Si** $h$ est injective et $f$ est surjective, **alors** $g$ est injective.

**Exercice 6 :** Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, trois applications. Démontrez que **si** $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, **alors** $f, g$ et $h$ le sont aussi.

**Exercice 7 :** Soient $f : E \to E$, $g : E \to E$, $h : E \to E$, trois applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ sont bijectives. Montrez que $f, g$ et $h$ sont bijectives.

**Exercice 8 :** Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrez que :

$$f \text{ est injective } \textit{ si et seulement si } f \text{ est surjective.}$$

## Images directes et réciproques

**Exercice 9 :** Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ et $f : E \to F$ une application. Démontrez que

**1.** $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

**2.** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

**3.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

**Exercice 10 :** Soient $C, D \in \mathscr{P}(F)$ et $f : E \to F$ une application. Démontrez que

**1.** $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$,

**2.** $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

**3.** $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

**Exercice 11 :** Soit $f : E \to F$ une application. Montrez que

$$f \text{ est injective } \textit{si et seulement si} \text{ pour toutes parties } A \text{ et } B \text{ de } E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$