

Lundi 2 Janvier 2017

## Fonctions Réelles

### Limites-Continuité-Dérivabilité



#### Blague du jour

Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de note et va voir son père :

- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de note !

#### Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Mathématicien, astronome et physicien français. Ce chef-d'oeuvre, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique. Il est nommé ministre de l'intérieur sous l'ère de Napoléon Ier, comte et marquis.



#### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante telle que :

$$\lim_{+\infty} f(2x) - f(x) = 0. \text{ Montrer que : } \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)} = 0.$$

Indication : On pourra d'abord montrer via Césaro que  $\lim_{+\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$ .



#### Exercice 2

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

On suppose que  $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b]$  tel que  $f(x) = g(y)$ .

Montrer qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = g(x)$ .



#### Exercice 3

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(ax) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  où  $a$  nombre réel fixe différent de 1 et -1.

Montrer que  $f$  est constante

Indication : Commencer d'abord par étudier le cas  $-1 < a < 1$ .



#### Exercice 4

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que :

$$g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{x} \text{ est décroissante.}$$

Montrer que  $f$  est continue.

 **Exercice 5**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

**1**  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tous réels  $x, y$ .

On pourra démontrer d'abord que  $f(x) = ax$  où  $a = f(1)$ . Pour cela montrer que :

**i**  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{N}$ .

**ii**  $f(0) = 0$ , puis  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$ .

**iii**  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Z}$ .

**iv**  $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**v**  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$ .

**vi**  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ . en utilisant la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  et la continuité de  $f$ .

**2**  $f(xy) = f(x) + f(y)$  pour tous réels  $x, y$ .

Poser  $g(x) = f(e^x)$ , en déduire la forme de  $g$  puis celle de  $f$ .

**3**  $f(xy) = f(x)f(y)$  pour tous réels  $x, y$ .

Montrer que :  $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ,  
 $f(1) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

puis poser  $g = \ln |f|$ , en déduire la forme de  $g$  puis celle de  $f$ .

**4**  $f(x + y) = f(x)f(y)$  pour tous réels  $x, y$ .

Poser  $g(x) = e^{f(x)}$ , en déduire la forme de  $g$  puis celle de  $f$ .

 **Exercice 6**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$ . Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ .

 **Exercice 7**

Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable en  $a$ .

Déterminer  $\lim_0 \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h}$ .

 **Exercice 8**

**1** Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire, celle d'une fonction impaire est paire.

**2** En déduire qu'en un centre de symétrie de la courbe la dérivée seconde est nulle .

 **Exercice 9**

On pose :  $f(x) = x^2 \left( 2 + \sin \left( \frac{1}{x^2} \right) \right)$  si  $x \neq 0$   
 $= 0$  si  $x = 0$

Montrer que  $f$  admet un minimum strict en 0 mais  $f$  n'est croissante sur aucun intervalle de la forme  $[0, a]$ .

### Exercice 10

On pose :  $f(x) = \frac{x}{1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$  si  $0 < x \leq 1$   
 $= 0$  si  $x = 0$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , strictement croissante mais que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une infinité de solutions.

### Exercice 11

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

$f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ . Montrer que strictement monotone.

### Exercice 12

1 Calculer les dérivée de :  $\ln(\ln(\ln(\ln(x))))$  ,  $x^{x^{x^x}}$  .

2 Calculer les dérivées  $n^{\text{ème}}$  de

$(1 - x^2) \cos(x)$  ,  $\frac{e^x}{x}$  ,  $x^{n-1} \ln(x)$

### Exercice 13

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$ , et  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) > 0$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ , et  $f'(c) \leq 0$ .

### Exercice 14

1 Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ .

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ , tel que  $\frac{1}{x} \in I$  on a :  $\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$  On pourra raisonner par récurrence.

2 Application : Calculer la dérivée  $n^{\text{ème}}$  des fonctions  $f$  définies par :  $f(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$ ,  $f(x) = x^{n-1} \ln(x)$  et  $f(x) = x^{n-1} \ln(1+x)$ .

### Exercice 15

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(0) = 0$  on pose  $S_n(f) = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$

1 Montrer que la suite  $x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  est convergente, soit  $L$  sa limite , on ne cherchera pas a la calculer pour le moment.

2 Montrer que  $S_n(f)$  converge vers un réel  $S$  qu'on exprimera en fonction de  $L$  et  $f'(0)$ .

Indication : On pourra utiliser la définition de  $f$  dérivable en 0.

3 En prenant  $f(x) = \ln(1+x)$  expliciter  $S$  puis en déduire  $L$ .

 **Exercice 16**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dérivable telle que  $f \circ f = f$ . Montrer que  $f$  est constante ou bien  $f = \text{id}_{[0,1]}$ .


 **Exercice 17**

1 Donner un équivalent de  $\ln(\cos x)$  au voisinage de zéro.

2 Soit la fonction  $f$  définie sur  $f :: \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ .

Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement (toujours noté  $f$ ) est dérivable en ce point.

3 Préciser  $f'(0)$ .

 **Exercice 18 : Théorème de Rolle à l'infini.**

Soit  $f$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui admet la même limite en  $-\infty$  et en  $+\infty$  montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet au moins une solution


 **Exercice 19 : Fonction périodique.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $T > 0$ . On suppose que  $f$  est  $T$ -périodique c-à-d :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$ .

1 Si  $f$  possède une limite en  $+\infty$ , montrer que cette limite est forcément finie et dans ce cas  $f$  est constante.

2 Si  $f$  est continue non constante, montrer que  $f$  a une plus petite période strictement positive.

3 Si  $f$  est continue, montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes.


 **Exercice 20 : Point fixe.**

1 Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue, montrer que  $f$  admet un point fixe.

2 Reprendre la même question en supposant cette fois  $f$  croissante.

*Indication :* Penser à  $\sup(A)$  où  $A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) \geq x\}$


3 A-t-on le même résultat si  $f$  est décroissante .

 **Exercice 21 : Injectivité locale.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(a) \neq 0$ .

1 Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) \neq f(a)$ .

2 Si  $f'$  est continue au point  $a$ , montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $f|_V$  soit injective.

 **Exercice 22 : le TVI, l'injection et la continuité.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b, \forall y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b), \exists x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

1 Montrer que si  $f$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.

2 Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

**Exercice 23 : Étude d'une suite implicite.**

Soit  $a \in ]0, 1[$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$  on se propose d'étudier les solutions des équations  $f_n(x) = 0$  où  $f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a$ ).

- 1 Montrer que  $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$  est croissante.
- 2 Étudier  $f_n$  sur  $]0, 1[$ , en déduire que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0, 1[$  que l'on notera  $x_n$ .
- 3 Dire pourquoi  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ , pour tout  $n \geq 1$ .
- 4 Étudier le signe de  $f_n(x_{n+1})$  en déduire que  $(x_n)$  est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie  $l$ .
- 5 Montrer que  $l = 1$ .
- 6 En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = a$ .
- 7 Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $x_n^n \geq a$ .
- 8 Montrer que  $\forall (x, y, b) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$  :  

$$0 < b \leq y \leq x \implies x - y \leq \frac{x^n - y^n}{nb^{n-1}}.$$
- 9 En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq \frac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \frac{x_n^n - a}{na}$ .
- 10 En déduire que :  $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}$ .

**Exercice 24 : Propriété des valeurs intermédiaires pour  $f'$ .**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

- 1 On suppose que :  $\forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$ . Montrer que  $f'$  est de signe constant.
- 2 Dans le cas général, montrer que  $f'([a, b])$  est un intervalle.

**Exercice 25 : Théorème des accroissements finis généralisés.**

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues dérivables sur  $]a, b[$  telles que :  $|f'(x)| \leq |g'(x)|, \forall x \in ]a, b[$   
 Montrer que :  $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$

**Exercice 26 : Problème d'emballage.**

Une usine fabrique des boîtes parallélépipédiques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de cotes  $a$  et  $b < a$  puis on découpe de chaque coin un carré de cote  $x$  puis on rabat les morceaux ainsi obtenus, quelle est la valeur de  $x$  qui réalise un volume maximal

**Exercice 27 : Dérivabilité uniforme.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Démontrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall x, y \in [a, b]$ ,

$$0 < |x - y| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| \leq \varepsilon.$$

**Exercice 28 : Étude des extremums et zéros d'une suite de fonctions.**

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 2$  on pose  $f_n(x) = x^n + x + 1$ .

1 Étudier le signe de  $f'_{2n}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2 En déduire que  $f_{2n}$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}$  en

$$a_n = -\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n}}.$$

3 On pose  $f_{2n}(a_n) = m_n$ , montrer que :  $-1 < a_n < 0$  et  $m_n > 0$ .

4 En déduire les limites de  $a_n$  et  $m_n$ .

5 Pour tout réel  $x > 0$  tel que  $x \neq \frac{1}{2}$ , on pose :  $f(x) = -\sqrt[2x-1]{\frac{1}{2x}}$ .

Trouver une fonction  $g$  telle que  $f'(x) = \frac{f(x)g(x)}{(2x-1)^2}$ .

6 Étudier le signe de  $g$  en déduire que  $f$  est décroissante.

7 En déduire que  $(a_n)$  est monotone.

8 Étudier  $f_{2n+1}$ , en déduire que l'équation  $f_{2n+1}(x) = 0$  admet une seule solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on notera  $b_n$ , vérifier que  $-1 < b_n < -\frac{1}{2}$ .

9 Calculer  $f_{2n+1}(b_{n+1})$ , en déduire que  $(b_n)$  est décroissante puis qu'elle converge.

10 Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -1$ , en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{2n+1} = 0$ .

**Exercice 29 : Étude d'une suite récurrente.**

On pose  $x_0 = \frac{3}{2}$

$$x_{n+1} = x_n(2 - \ln(x_n)), \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Montrer que  $(x_n)$  est bien définie.

On pourra montrer par récurrence que  $0 < x_n \leq e$

2 Montrer que  $(x_n)$  est croissante.

3 En déduire que  $(x_n)$  est convergente, préciser sa limite.

4 Montrer que :

$$\forall (x, y) \in [2, e]^2 : \left| \ln(y) - \ln(x) - \frac{y-x}{x} \right| \leq \frac{(y-x)^2}{4}$$

5 En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* , |x_{n+1} - e| \leq \frac{3}{4}|x_n - e|^2$ .

6 En déduire les 5 chiffres après la virgule de  $e$ .

**Exercice 30 : Étude d'une suite implicite.**

1 Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , l'équation :  $x + x^2 + \dots + x^n = 1$  admet une solution unique dans  $]0, 1[$  que l'on notera  $x_n$ .

Indication : On pourra penser à utiliser le TVI sur  $[0, 1]$  pour la fonction  $f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n - 1$ .

2 Montrer que  $(x_n)$  est monotone puis convergente.

3 Calculer  $x_2$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

**Exercice 31 : Étude d'une suite implicite.**

Pour tout entier  $n$  et réel  $x$  on pose  $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n - 1$ .

- 1 Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[0, 1]$  que l'on notera  $x_n$ .
- 2 Calculer  $f_{n+1}(x_n)$ , en déduire que  $(x_n)$  est décroissante puis qu'elle converge.
- 3 Montrer que pour  $x$  différent de 1 on a :  $f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - 1$
- 4 Calculer  $x_2$ , puis en déduire les limites des suites suivantes  $(x_n^n)$ ,  $(nx_n^n)$ ,  $(x_n)$ .

**Exercice 32 : Distance à la corde.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- 1 On suppose que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soit  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

*Indication : Considérer  $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$  où  $\lambda$  est choisi de sorte que  $g(c) = 0$ .*

- 2 Cas général : Soit  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

- 3 En déduire la distance de la corde à la courbe en tout point, puis une majoration de cette distance.

**Exercice 33 : Cordes de longueur  $\frac{1}{n}$ .**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ .

- 1 Montrer qu'il existe  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  tel que  $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .
- 2 Pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , montrer qu'il existe  $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  tel que  $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ .
- 3 Trouver une fonction  $f$  telle que :  $\forall x \in \left[0, \frac{3}{5}\right], f(x) \neq f\left(x + \frac{2}{5}\right)$ .
- 4 Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que :  
 $\forall b \in ]0, a], \exists x \in [0, 1 - b]$  tel que  $f(x) = f(x + b)$ .

**Exercice 34 : Écart à un polynôme interpolateur.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $a_1, \dots, a_n$   $n$  points distincts dans  $\mathbb{R}$ , et  $P$  le polynôme de Lagrange de degré inférieur à  $n - 1$ , prenant les mêmes valeurs que  $f$  aux points  $a_i$ , on dit qu'il interpole  $f$

aux points  $a_i$ . On pose  $Q(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ .

Montrer que :  $\forall b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(b) = P(b) + Q(b)f^{(n)}(c)$

*Indication : Considérer  $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$  où  $\lambda$  est choisi de sorte que  $g(b) = 0$ .*

**Exercice 35 : Théorème de Rolle successif.**

1 soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  qui s'annule au moins  $n + 1$  fois sur  $[a, b]$ , montrer alors que  $g^{(n)}$  s'annule au moins une fois sur  $[a, b]$ .

Indication : Penser à utiliser le théorème de Rolle plusieurs fois.

2 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$   $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  des nombres réels deux à deux distincts et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a_1, a_n]$  qui s'annule sur tous les  $a_i$ , montrer que :

$$\forall x \in ]a_1, a_n[ \setminus \{a_k \text{ tel que } 1 \leq k \leq n\} \quad \exists c_x \in ]a_1, a_n[ \text{ tel que } f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \prod_{k=1}^n (x - a_k).$$

Indication on pourra fixer  $x$  et utiliser (1) pour la fonction  $g(t) = f(t) - A \prod_{k=1}^n (t - a_k)$  avec

$A$  nombre réel choisi tel que :  $g(x) = 0$ .

**Exercice 36 : Polynômes de Legendre.**

On pose  $f(t) = (t^2 - 1)^n$ .

1 Montrer que :  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$ .

2 Calculer  $f^{(n)}(1)$  et  $f^{(n)}(-1)$ .

3 Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule au moins  $n$  fois dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**Exercice 37 : Règle de l'Hospital.**

Soient  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables avec :  $\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$ .

1 Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Indication : Appliquer le théorème de Rolle à  $f - \lambda g$ , où  $\lambda$  est un réel bien choisi.

2 En déduire que si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$  (Règle de l'Hospital).

3 Application : déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$ .

**Exercice 38 : Fonctions complexes**

1 i Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  montrer qu'il existe un unique complexe  $b$  de partie réelle strictement positive tel que  $b^2 = a$ .

ii On pose  $\mathcal{P}^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left( \frac{z}{b} \right) > 0 \right\}$ , et  $f :: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto \frac{1}{2} \left( z + \frac{a}{z} \right)$

Montrer que  $\mathcal{P}^+$  est stable par  $f$ .

iii On pose  $z_0 = a, z_{n+1} = f(z_n), w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que  $z_n, w_n$  sont bien définies.

iv Exprimer  $w_n$  en fonction de  $w_{n-1}$  puis en fonction de  $b, n$ .

v Montrer que  $|w_0| < 1$ , en déduire les limites de  $w_n, z_n$ .

2 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $t \mapsto e^{it}$ .

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais ne vérifie pas le TAF