Jeudi 18 Janvier 2017

Structures Algébrique

Blague du jour

- Pourquoi les professeurs de Maths ne regardent jamais de leurs fenêtres le matin ?
- Par-ce qu'ils ne seront pas quoi faire l'après midi !

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

Physicien allemand, lauréat du Prix Nobel de physique en 1918, de la Médaille Lorentz en 1927, et du prix Goethe en 1945. Ses travaux s'intéressent à thermodynamique, l'électromagnétisme et à la physique statistique. C'est à la fin de 1900 qu'il présente la théorie des quanta, laissant Einstein l'étayer solidement après.

Partie I : Groupes.

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la LCI suivante :

$$(a,b) * (c,d) = (ac, \frac{d}{a} + bc)$$

montrer que a définit une structure de groupe, s'agit-il d'un groupe abélien ?

Exercice 2

Soit $(E, .)$ un magma tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in E & x.x = x \\ \forall (x,y,z) \in E^3 & (x.y).z = (y.z).x \end{cases}$$

Montrer que . est commutative.

Exercice 3

Soit $(E, .)$ un magma, pour toute partie A de E, on appelle centre de A, l'ensemble noté $c(A)$ défini par :

$$c(A) = \{x \in E \text{ tel que } a.x = x.a \quad \forall a \in A\}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in P(E)$ on a : $A \subset c(c(A))$.
2. $\forall (A,B) \in P(E)^2 : A \subset B \Longrightarrow c(B) \subset c(A)$.
3. $\forall A \in P(E) : c(A) = c(c(c(A)))$.
4. $(E, .)$ groupe $\Longrightarrow (c(E), .)$ groupe .

Exercice 4

1. Montrer que aHa^{-1} est sous-groupe de G
2. Montrer que : aH sous groupe de $G \iff \quad a \in H$
3. Montrer que Ha sous groupe de $G \iff \quad a \in H$
4. Montrer que HK sous groupe de $G \iff HK = KH$
   Indication : Montrer d'abord que $x \in HK \Leftrightarrow x^{-1} \in KH$.

Exercice 5

Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, H, K des sous groupes de G on pose :

- aH l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a.h$ où $h \in H$
- Ha l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.a$ où $h \in H$
- HK l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.k$ où $(h, k) \in H \times K$

Exercice 6

Soit $(G, .)$ un groupe, $(a, b, c) \in G^3$ fixes et e neutre pour ., montrer les résultats suivants :

1. $(a^5 = e, ab = ba^3) \Longrightarrow (a^2b = ba, ab^3 = b^3a^2)$
2. $(b^6 = e, ab = b^4a) \Longrightarrow (b^3 = e, ab = ba)$
3. $(a^5 = e, aba^{-1} = b^2) \Longrightarrow b^{31} = e$
4. $(ab)^{-1} = a^{-1}b$ et $(ba)^{-1} = b^{-1}a \Longrightarrow (a^2 = b^2, a^2b^2 = e)$
5. $(a^{-1}ba = b^{-1}, b^{-1}ab = a^{-1}) \Longrightarrow a^4 = b^4 = e$
6. $((aba) = b^3, b^5 = e) \Longrightarrow (ab = ba, a^2 = b^2)$

Exercice 7

Transfert de structure.

Soit $(G, .)$ un groupe, E un ensemble, et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\ x, y \in E,\ \ x \star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes via ϕ.

Exercice 8

Translations surjectives.

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\ a, b \in G,\ \exists\ x, y \in G \text{ tel que } : a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 9

Images directes et réciproques.

Soit G un groupe additif et $f : (G, .) \to (G', *)$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a :
$f^{-1}(f(H)) = H.\text{Ker}\, f$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a :
$f(f^{-1}(H')) = H' \cap \text{Im}\, f$.

Définition. Dans toute la suite, si E est un ensemble fini, on notera $\text{card}(E)$ pour designer le nombre de ses éléments.
On admettra, que toute application injective ou surjective entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective.

Exercice 10

Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative.

1. On suppose que tous ses éléments sont réguliers, montrer que c'est un groupe.
Indication : Pour $a \in E$, fixé, étudier l'injection et surjection de l'application $\varphi_a :: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a.x \end{array}$
2. On suppose que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \exists! a \in E$ tel que $y = a.x$, montrer que c'est un groupe.
3. Reprendre les questions précédentes on supposant cette fois que la LCI est seulement associative.

Exercice 11

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 12

Soit $(G, .)$ un groupe fini et H, K deux sous-groupes de G.

On considère l'application $H \times K$ muni de la loi $.$ définie par $(a, b).(c, d) = (a.b, c.d)$ est un groupe. $\phi :: \begin{array}{ccc} H \times K & \to & G \\ (h, k) & \mapsto & h.k \end{array}$

1. Montrer que $(H \times K, .)$ est un groupe.
2. Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?
3. Soit $z \in HK$, $z = h_0.k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$.
Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0.t, t^{-1}.k_0)$ avec $t \in H \cap K$.
4. En déduire que : $\text{card}(HK)\text{card}(H \cap K) = \text{card}(H)\text{card}(K)$.

Partie II : Anneaux et corps.

Exercice 1

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif, $\forall (x,n) \in A$ x $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$\begin{array}{ll} f_0(x) = 1_A & f_1(x) = x \\ f_2(x) = x(x-1_A) & f_n(x) = x(x-1_A)\dots(x-(n-1)1_A) \end{array}$$

Montrer que : $\forall (x,y) \in A^2 :\quad f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_{n-k}(x) f_k(y)$

Exercice 2 : Entiers 2-adiques.

Soit $A = \{m/n \in \mathbb{Q}$ tel que : n est impair$\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Chercher les éléments inversibles dans A.

Exercice 3 : Intègre et fini est corps.

Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1. Montrer que $\forall a \neq 0_A$, l'application $\phi_a :: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & a.x \end{array}$ est injective.
2. En déduire que si A est fini, alors c'est un corps.

Exercice 4

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant $\mathbb{Q}$, et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ un automorphisme de corps, montrer que $f(x) = x \forall x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x = a + b\sqrt{2}$ tel que $a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.
3. En déduire que les seuls automorphismes de corps sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont l'identité et l'application $f :: \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ a+b\sqrt{2} & \longmapsto & a-b\sqrt{2} \end{array}$.

Exercice 5

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels est muni de deux lois notées $+$ et $*$ définies de la façon suivante :

$$(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b') \quad ; \quad (a,b)*(a',b') = (aa', ab'+ba') .$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
2. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ? Lorsque l'élément (a,b) est inversible, quelle est l'expression de son inverse $(a,b)^{-1}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note : $(a,b)^n = \underbrace{(a,b)*(a,b)*\cdots*(a,b)}_{n \quad \text{fois}}$

   Donner une expression simple de $(a,b)^n$.

Exercice 6 : *Anneaux booléens, (Georges Boole).*

Soit $(A, +, .)$ un anneau tel que $x^2 = x, \quad \forall x \in A$.

1. Montrer alors que : $\forall x \in A; \quad 2x = 0_A$
2. En déduire ensuite que A est commutatif.
   Indication. on pourra développer $(x+y)^2$.
3. Montrer que A ne peut pas posséder exactement 3 éléments.
4. Démontrer que si card$A$ 2, alors A n'est pas intègre.
   Indication : Calculer $x(x + 1_A)$.
5. Montrer que tout anneau booléen fini, est de cardinal une puissance de 2.
6. Vérifier que $(\mathcal{P}(E), \cap, \Delta)$ est un anneau booléen.

Exercice 7 : Élments nilpotents.

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif on dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 0_A$.

1. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents.
   Indication. On pourra montrer que :
   $x^n = y^m = 0_A \Longrightarrow (xy)^n = (x+y)^{n+m-1} = 0_A$.
2. Soit a nilpotent, montrer que $1_A - a$ et $1_A + a$ sont inversibles.
   Indication : Penser la factoriser de $a^n - b^n$.
3. Soit a nilpotent, et b inversible, montrer que $a+b$ et $a-b$ sont inversibles, préciser leurs inverses.

Exercice 8 : Entiers de Gauss.

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ tel que } : a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \text{ tel que } : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}^*, \times)$
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[i]$. Quels sont les éléments inversibles ?
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{Q}[i], \exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - z'| < 1$.
4. Soient $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$.
5. A-t-on unicité ?

Exercice 9 : Caractéristique d'un anneau.

Soit A un anneau. On appelle *caractéristique* de A, le plus petit entier, quand il existe, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n1_A = 0_A$, sinon on dit que A est de caractéristique nulle.

1. Préciser la caractéristique de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   On suppose dans le suite que A est de caractéristique, $n \neq 0$.
2. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^* \; m1_A = 0 \Rightarrow n$ divise m.
3. Montrer que : $\forall \, x \in A, \; nx = 0_A$.
4. Montrer que : $pq1_A = p1_A q1_A \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$.
5. Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.
6. Si A est intègre et commutatif, montrer que $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.

Exercice 10 : Anneau de caractéristique 2.

Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\, x \in A,\ x^2 = x$.

1. Exemple d'un tel anneau ?
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?
3. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.
4. Pour $x, y \in A$ on pose : $x \leq y \Leftrightarrow \exists\, a \in A$ tel que : $x = ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre, qui est totale si A est un corps.

Partie III : Espaces vectoriels et Algèbres.

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g : E \to E$ linéaires.

Montrer que : $f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E.

Montrer que : $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

Montrer que : $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

Exercice 4

1. Montrer que tout $\mathbb{R}$-endomorphisme, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme : $f(z) = az + b\bar{z}$ o $a, b \in \mathbb{C}$ des constantes exprimer en fonction de $f(1)$ et $f(i)$.
2. Montrer que f injectif $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = id_E$.

Montrer que : $(g \circ f)^2 = g \circ f$

$\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$

$\ker g \circ f = \ker f$

Exercice 6 : *Commutant itérés*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $C_i = \ker \varphi^i$, ainsi $C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u, C_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1. Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2. Montrer que $C = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i$ est une sous-algbère de $\mathcal{L}(E)$ appelée *Commutant* de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 7

Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & g \mid g(x) = xf(x) \end{array}$ et $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$.

1. Montrer que u et v sont des endomorphismes d'espaces vectoriels.
2. Sont-ils des endomorphismes d'algèbres ?
3. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.

Exercice 8

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.
2. Comparer $\ker(v \circ u)$ et $\ker u$; $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et $\operatorname{Im} v$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \ker u^k$ et $I_k = \operatorname{Im} u^k$. Montrer que :
    1. Préciser I_0 et N_0.
    2. $\forall k \geqslant 1$, on a : $u(N_k) \subset N_{k-1}$ et $u(I_k) = I_{k+1}$
    3. $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
    4. Si $N_k = N_{k+1}$, alors $\forall q \geqslant k, N_q = N_k$.
    5. Si $I_k = I_{k+1}$, alors $\forall q \geqslant k, I_q = I_k$.

Fin