Nombres Complexes

Johann Carl Friedrich Gauss(1777-1855)

Mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a été surnommé "le prince des mathématiciens". Considéré par beaucoup comme distant et austère, Gauss était profondément pieux et conservateur. Issu d'un milieu modeste (père jardinier), il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon.

Blaque du jour

- Que va dire un homme réel à sa femme complexe ?
- Tu es ma partie imaginaire !

Exercice 1

1. Écrire $(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$. sous sa forme canonique, puis trouver ses racines cubiques de
2. Donner le module et l'Argument du complexe $\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2016}$.
3. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que $|z|=1 \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R}$.
4. Soit $z\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z^2-2z\cos(\theta)+1=0$.
   Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $z^{2n}-2z^n\cos(n\theta)+1=0$.

Exercice 2

1. Trouver $a,b,c\in\mathbb{U}$ tels que : $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1 \end{cases}$
2. Intéprétez le résultat trouvé géométriquement.

Exercice 3

Soient u,v,w trois complexes unitaires, de module égal à 1, tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$.

Exercice 4

1. Soit $n\in\mathbb{N},\theta\in\mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :
   $$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta),\ S_2=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\cos(k\theta) \text{ et } S_3=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2}).}(-1)^k\binom{n}{2k}$$
2. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}$. Simplifier les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb),\ \sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$
   En déduire la valeur de : $\cos(\frac{\pi}{11})+\cos(\frac{3\pi}{11})+\cos(\frac{5\pi}{11})+\cos(\frac{7\pi}{11})+\cos(\frac{9\pi}{11})$

Exercice 5

1. Trouver une *CNS* sur les complexes a, b, c pour qu'ils soient les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.
2. D'un triangle équilatéral.
3. Trouver l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes
   (a) z, z^2, z^3 soient alignés.
   (b) z, z^2, z^3 soient sommets d'un triangle isocèle.
   (c) $1, z, z^2, z^3$ soient cocycliques.

Exercice 6 : Identité du parallélogramme.

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.
2. Donner son interprétation géométrique.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha| + |\beta| = |m+\mu| + |m-\mu|$.

Exercice 7 : Triangle équilatéral.

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
4. $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 8

Montrer que, pour tout nombre complexe z de module différent de 1 et tout entier naturel n, on a : $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

Exercice 9

Determiner tous les $z \in \mathbb{C}$ dont les racines cubiques z_1, z_2, z_3 verifient l'équation : $z_1 - z_2 = \dfrac{1}{z_3}$.

Exercice 10

Soit $z \in \mathbb{C}$ et n un entier non nul. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

Exercice 11

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que : $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n$.
Montrer que $|z| \leq 1$.

Exercice 12

Soit $(\omega_k)_{0\leq k\leq n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

Calcluler $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^p$ où $p\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=k}^{n-1}\binom{p}{k}\omega^{k+p}$.

Exercice 13

1. Soient $u,v\in\mathbb{C}$. Vérifier que : $\left(|u|^2-|v|^2\right)^2=\left(\dfrac{|u+v|^2+|u-v|^2}{2}\right)^2-4|uv|^2$.
2. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Donner une CNS pour que les racines de $z^2+\alpha z+\beta=0$ aient même module.

Exercice 14

Soient $a,b\in\mathbb{U}$ distincts et $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $\left(\dfrac{z+ab\overline{z}-a-b}{a-b}\right)^2\in\mathbb{R}$.

Exercice 15

1. On suppose que $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=-k}^{k}e^{ipx}=\left(\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.
2. Calculer la valeur de cette somme pour $x\in 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 16

Simplifier $\displaystyle\prod_{p=2}^{n}\dfrac{p^3-1}{p^3+1}$ en utilisant la relation : $p^3-1=(p-1)(p-j)(p-j^2)$.

Exercice 17 : Orthocentre

Soient $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que si deux des rapports $\dfrac{d-a}{b-c},\dfrac{d-b}{c-a},\dfrac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.
2. En déduire que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point, appelé orthocentre.

Exercice 18 : Pentagone règulier : Construction à la règle et au compas :

On pose $w=e^{2i\frac{\pi}{5}}, a=w+w^4, b=w^2+w^3$.

1. Montrer que *1+a+b=0* en déduire que *a* et *b* sont les solutions de l'équation $x^2+x-1=0$.
2. Donner *a* en fonction de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$, puis en déduire la valeur de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$.
3. On note par $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ les points d'affixes $(w^i)_{1\leq i\leq 4}$ et *H* le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe *(ox)* montrer que $\overline{OH}=\dfrac{a}{2}$.
4. On note par *M* le point d'abscisse positive , point d'intersection de l'axe *(ox)* avec le cercle de centre *C* (- $\dfrac{1}{2}$) passant par *B(i)* montrer que $\overline{OM}=a$ et que *H* est le milieu de $[0,M]$.
5. En déduire une construction du pentagone régulier a l'aide de la règle et le compas.