

FEUILLE D'EXERCICES : *Espaces vectoriels.*
PARTIE II : *Dimension finie.*

Feuille d'Exercices

2016-2017

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = id_E$.

- 1) Montrer que : $\text{Ker}((f - id_E) \oplus \text{Im}((f - id_E)) = E$.
- 2) Montrer que : $\text{Ker}((f - id_E)) = \text{Im}((f^2 + f + id_E))$.
 $\text{Im}((f - id_E)) = \text{Ker}((f^2 + f + id_E))$

Exercice 2. Soient E, F deux \mathbb{R} -espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \rightarrow F$ linéaires.

- 1) Montrer que $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
- 2) En déduire que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- 3) Montrer que $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \implies \text{ker } u + v = \text{ker } u \cap \text{ker } v$.
- 4) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$ et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E$.
- 5) En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.
- 6) Discuter les cas d'égalité.

Exercice 3. Soient E, F deux \mathbb{R} -espace vectoriel de dimensions finies. $u, v : E \rightarrow F$ linéaires telles que : $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \text{ker } u + \text{ker } v = E$. Montrer que les deux sommes sont directes .

Exercice 4. Soient E, F deux \mathbb{R} -espace vectoriel de dimensions finies. $u : E \rightarrow F$, $v : F \rightarrow E$ linéaires telles $uov = v, uovu = u$. Montrer que : $E = \text{Im}(v) \oplus \text{ker } u$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$.

Exercice 5. Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g = 0, f + g \in GL(E)$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$.

Exercice 6. Soient E, F deux \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H est un sous espace vectoriel de E et K est un sous espace vectoriel de F , montrer que :

- 1) $\text{Im}(f|_H) = f(H)$ et $\text{ker } f|_H = \text{ker } f \cap H$.
- 2) $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \text{ker } f)$.
- 3) $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \text{Im}(f)) + \dim(\text{ker } f)$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.

- 1) Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.
- 2) Montrer que $2 \text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(f)}$.

Exercice 8. Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :

- 1) $\dim \text{Ker}((f \circ g)) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(g)}$.
- 2) $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $g|_{\text{Im}(f)}$.
- 3) $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim E \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Exercice 9. Soit E un \mathbb{R} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -id_E$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $u \in E$, on pose : $z.u = xu + yf(u)$.

- 1) Montrer qu'on définit ainsi une structure de \mathbb{C} -ev sur E .
- 2) En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

Exercice 10. Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun. Raisonner par récurrence sur $\text{codim } H = \dim E - \dim H$.

Exercice 11. Soient f_1, \dots, f_n des formes linéaires sur \mathbb{K}^n telles que $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \neq \{0\}$. Montrer que (f_1, \dots, f_n) est liée.

Exercice 12. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in E^*$ et (f_1, \dots, f_n) libre dans E^* . Montrer que f est combinaison linéaire de f_1, \dots, f_n si et seulement si $\text{Ker}(f) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$.

Exercice 13. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$. On considère l'application : $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^p$

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$$
 Montrer que Φ est surjective si et seulement si (f_1, \dots, f_p) est libre.

Exercice 14. Soit E un \mathbb{K} -ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires f_1, \dots, f_p telles que $\bigcap_{i=1}^p \ker f_i = \{0\}$. Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p .

Exercice 15. Sur \mathbb{R}^3 on considère les formes linéaires suivantes définies par : $f_1(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $f_2(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ et $f_3(x, y, z) = 3x + 4y + 6z$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
- 2) Trouver sa base duale $\mathcal{B}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*)$, vérifiant

$$\begin{aligned} f_i^*(f_j) &= 1 & \text{si } i = j \\ &= 0 & \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Exercice 16. Polynômes d'interpolation de Hermite.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ réels de $[0, 1]$ deux à deux distincts, et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{2n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ P &\longmapsto \varphi(P) = (P(r_1), P'(r_1), \dots, P(r_n), P'(r_n)) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que φ est un isomorphisme.
- 2) En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Exercice 17. Formule de Van der Monde :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose : $P_k(X) = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$

- 1) Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Calculer les composantes dans \mathcal{B} de $((X - a)^k (X - b)^n)^{(n)}$.
- 3) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 18. Centre de $\mathcal{L}(E)$.

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est :

$Z = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$.

Autrement dit formé par les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

- 1) Soit $f \in Z, x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = -f(x)$.
- 2) En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.
- 3) Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall g \in GL(E), f \circ g = g \circ f\}$.

Exercice 19. Endomorphisme nilpotent.

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

- 1) Soit $u \in E \setminus \text{Ker}(f)^{p-1}$.
Montrer que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.
- 2) En déduire que si E est de dimension finie n , alors $f^n = 0$.
- 3) Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $f + g \in GL(E) \dots$

Exercice 20. Endomorphisme cyclique.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E .

- 1) Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
Considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = (x, \dots, f^{p-1}(x))$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de \mathcal{F} pour tout entier $k \geq p$.
- 2) Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f .

Exercice 21. Noyaux itérés.

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

- 1) Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.
- 2) Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \dots = N_{p+k} = \dots$
- 3) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p .
- 4) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.
- 5) Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.
Indication : Prendre F supplémentaire de I_k dans I_{k+1} et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

Fin.