Espaces Vectoriels Dimension Finie

Td Immersion en Spé MP

Valeurs et vecteurs propres

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et à appliquer un changement de base à la matrice d'un endomorphisme.

Exercice 1

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
3. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Exercice 3

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

   et en déduire que f admet toujours une valeur propre.
3. Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.

Exercice 4

u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - mathrmId$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.
   (d) Retrouver A^n.

Exercice 5

1. (a) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}.$$
   (b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A.
   (c) Montrer que le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
   (d) Montrer que le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
   (e) Calculer graphiquement l'image du vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat par le calcul.
   (f) Montrer que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
   (g) Quelle est la matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? On la notera D.
   (h) Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur $\vec{v}_1$ et dont la deuxième colonne est le vecteur $\vec{v}_2$. Calculer P^{-1}.
   (i) Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?
   (j) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Fin