# Logique Mathématique

**Socrate (-470 , -399 AvJC)**

Philosophe grec considéré comme l'un des inventeurs de la philosophie morale et politique. Socrate n'a laissé aucun écrit, mais sa pensée et sa réputation se sont transmises par des témoignages indirects de ses disciples notamment Platon et Xénophon. Sa condamnation à mort a contribué à faire de lui une icône.

Une question philosophique fût posée jadis par les grecques : Y a t il identité entre l'être et le discours. Y'en a qui pensent que l'être a la primauté et c'est lui qui assure que le discours peut être vrai. Les sophistes opèrent un renversement : c'est le discours qui a la primauté et n'importe quel discours peut donner une existence à n'importe quel être.

Socrate accorde aux sophistes qu'il existe une multitude d'êtres, qui peuvent se montrer illusoires et trompeurs, en relation avec le discours, mais que ces êtres existent aussi en dehors du discours, préservant ainsi la possibilité d'un discours vrai, qui ne varie pas en fonction de la subjectivité de chacun.

Socrate est ainsi à l'origine en philosophie de la notion de concept, ouvrant par là le chemin aux idées platoniciennes qui sont considérées comme les prémices de la logique mathématique moderne.

## Blaque du jour

- **P ou $\overline{\text{P}} = \text{V}$** : Deux mathématiciens spécialistes de la logique se rencontrent et discutent :
  – Salut vieux ! j'ai de bonnes nouvelles ! Ma femme a récemment mis au monde notre premier enfant.
  – Ah ! Félicitations ! C'est un garçon ou une fille ?
  – Oui, c'est exact.
- **Le mouton noir** : Un mathématicien, un biologiste et un physicien voyagent ensemble en Écosse dans un train. Soudain, ils voient à travers la fenêtre un mouton noir.
  Le biologiste dit : « Ah ! En Écosse les moutons sont noirs. »
  Le physicien réplique : « Hum ! Attention ! On n'a fait qu'une observation et tout ce qu'on peut dire c'est qu'il y a un mouton noir, hein ! »
  Le mathématicien les regarde avec un air hautain et dit : « En Écosse, il existe au moins un mouton dont, au moins, un côté est noir. »

## Exercice 1

Soient P , Q et R trois assertions.

❶ Montrer que si $\text{P} \Rightarrow \text{Q}$ est vraie alors, $(\text{P et R}) \Rightarrow \text{Q}$ est vraie.

❷ Montrer que si $\text{P} \Rightarrow \text{Q}$ est vraie alors, $\text{P} \Rightarrow (\text{Q et R})$ est vraie.


My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

## Exercice 2

On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

## Exercice 3 : Négations

les assertions suivantes sont elles équivalentes ? Donner la négation de chacune.

❶ $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 \geqslant 0 \text{ et } |x| = \pm x) \cdots\cdots (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \pm x)$ ;

❷ $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 0 \text{ et } x^2 = x^3) \cdots\cdots (\exists x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^3)$ ;

❸ $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ est pair ou } n \text{ est impair}) \cdots\cdots (\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}) \mathrm{ou} (\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est impair})$ ;

❹ $\exists r \in \mathbb{Q},\ (r \leqslant 2 \text{ et } r \geqslant 1) \cdots\cdots (\exists r \in \mathbb{Q},\ r \leqslant 2) \text{ et } (\exists r \in \mathbb{Q},\ r \geqslant 1)$.

## Exercice 4 : Disjonction des cas

Montrer que pour tous réels $x, y$ on a :

❶ $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ;

❷ $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

❸ $\left(x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(1 - x \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

## Exercice 5 : Contraposée ou Absurde

❶ Montrer que $x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Puis en déduire que $\left(x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(1 - x \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

❷ Soit $n$ un entier, tel que $n^2$ est pair, montrer alors $n$ est aussi pair

❸ Soit $x$ un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est aussi irrationnel.

❹ Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

❺ On se donne trois réels $x; y; z$ positifs tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Montrer que $x; y; z$ sont distincts de 1 et que $\min(x; y; z) < 1$.

❻ Montrer qu'aucun entier $(6m + n)(m + 6n)$ (avec $m; n \in \mathbb{N}$) n'est une puissance de 2.

## Exercice 6 : Analyse-Synthèse

❶ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$.

❷ Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Ecrire ainsi la fonction exponentielle.

❸ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x - f(y)) = 2 - x - y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

☛ Indication : prendre $y = 0$ puis penser à un changement de variable.

❹ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) + x f(1 - x) = 1 + x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☛ Indication : prendre $y = 1 - x$.

## Exercice 7 : Récurrence Faible

❶ On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n < 1$.

❷ Démontrer l'inégalité $2^n > n$ pour tout entier naturel $n$.

❸ Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, l'entier $3^{2n} - 2n$ est un multiple de 7.

## Exercice 8 : Récurrence Forte

❶ Soit la suite $(u_n)$ définie comme suit : $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. On considère $\Delta$ le descriminant de l'équation caractèristique $(*)$ $\quad ax^2 + bx + c = 0$.

- 1èr cas : $\Delta > 0$. Montrer que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où $r_1, r_2$ solutions rèelles de (*) et $\lambda, \mu$ vérifiant $\lambda + \mu = \alpha$, $r_1\lambda + r_2\mu = \beta$.
- 2ème cas : $\Delta = 0$. Montrer que $u_n = (\lambda + n\mu)r^n$, où $r$ solution double de (*) et $\lambda, \mu$ vérifiant $\lambda = \alpha$, $r(\lambda + \mu) = \beta$.
- 3ème cas : $\Delta < 0$. Montrer que $u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))r^n$, où $re^{i\theta}$ solution complexe de (*) et $\lambda, \mu$ vérifiant $\lambda = \alpha$, $r(\lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) = \beta$.

❷ Soit la suite $(v_n)$ définie comme suit : $v_0 = v_1 = 1$ et $v_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ Montrez que pour tout $n \geqslant 1, v_n = 2^{n-1}$.

❸ Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $p$ et $q$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

## Exercice 9 : Récurrence à double indice

Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{(nm)!}{n!m!} \in \mathbb{N}$.

Fin