Suites Numériques

Jeudi 23 Novembre 2017

Blague du jour

Comment retenir les chiffres après la virgule de $\pi \approx 3,1415926535\cdots$? *Que j'aime faire apprendre un nombre utile aux sages* : On compte le nombre de lettres dans chaque mot, donc que=3, j=1, aime=4, ... en apprenant en plus cette phrase "*Immortel Archimède, artiste, ingénieur, Qui de ton jugement peut priser la valeur ? Pour moi ton problème eut de pareils avantages*", on retient 30 chiffres après la virgule.

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Les contributions principales de Cesàro appartiennent au champ de la géométrie différentielle, notamment la construction d'une courbe fractale, la "courbe à flocon de neige" de Koch, continue mais dérivable nulle part. Il proposa aussi une définition possible de la limite d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro". Sa mort fut tragique, elle se produisit alors qu'il tentait de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt[n]{n!}$.

1. Montrer que : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.
2. Soit $k \geq 2$. Démontrer l'encadrement : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, dx$.
3. En déduire un encadrement de $\ln u_n$, puis que : $\lim u_n = +\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   - i. Étudier le signe de v_n.
   - ii. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 2

Soit $(u_n),(v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que $(u_n v_n)$ converge vers 1, montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1 .

Exercice 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+$ fixes. Trouver les suites réelles :

1. $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
2. $u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 4

1. Montrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x > 0$
2. En déduire les limites des suites suivantes : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}, \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

1. Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.
2. Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$.
3. La suite (S_n) est-elle convergente ?
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

1. $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ convergent vers la mme limite $\Longrightarrow (u_n)$ converge
2. $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent $\Longrightarrow (u_n)$ converge.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite monotone qui admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente.
Montrer que (u_n) est aussi convergente .

Exercice 8

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente et L sa limite on suppose que $L \notin \mathbb{Z}$

1. Montrer que $E(L) < x_n < E(L) + 1$ partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(E(x_n))$ est stationnaire puis que (x_n) converge vers $E(L)$

Exercice 9

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixe, on pose $u_n(m) = \sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge.
   Notons $L(m)$ sa limite.
2. Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$

Exercice 10

On pose $u_n = \cos(n), v_n = \sin(n)$

1. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n
2. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0
3. Conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger

Exercice 11 : Calcul approché de π l'aide de la méthode de Viete

1. Soit $0 < \theta < \pi$ tel que $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   i. Montrer que les suites $2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ sont adjacentes.
   ii. Calculer leurs limites communes.
2. Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} & , v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} & , v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

   Indication : On pourra utiliser les relations : $\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{\infty} \left(v_n\sqrt{2 - u_n}\right) = \pi$.

Exercice 12 : Suites adjacentes

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$, on pose : $\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$
   i. Montrer que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ sont adjacentes.
   ii. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en déduire $\lim u_n$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$, on pose : $\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n} & , b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$
   i. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
   ii. Calculer leurs limites communes.

Exercice 13 : Moyenne arithmico-géométrique.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a > b$, on pose : $\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies.
2. Montrer qu'elles sont adjacentes.
   On note par $M(a, b)$ leurs limite commune qu'on appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|a_n^2 - b_n^2| \leq 16b^2 \left(\dfrac{a^2 - b^2}{16b^2}\right)^{2^n}$
4. Donner une majoration de $|a_n - M(a, b)|$ et $|M(a, b) - b_n|$ en fonction de a, b, n
5. En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2, 1)$ à 10^{-4} prés.

Exercice 14 : Méthode des isopêrimétres

1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose : $\begin{cases} a_0 = a & , b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & , b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$
   - i. Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
   - ii. Exprimer leurs limites communes en fonction de $\theta = \arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)$.
     Indication : On pourra d'abord commencer par exprimer les a_n, b_n en fonction de θ.
2. soit $n \in \mathbb{N}$, et P_n le polygne régulier 2^n côts et de périmètre 2, soit r_n le rayon du cercle inscrit et R_n celui du cercle circonscrit P_n.
   - i. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a : $r_{n+1} = \dfrac{r_n + R_n}{2}, R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} R_n}$
   - ii. En déduire qu'elle sont adjacentes.
   - iii. En remarquant que : $\dfrac{1}{R_n} \leq \pi \leq \dfrac{1}{r_n}$ en déduire que $\dfrac{1}{R_n}, \dfrac{1}{r_n}$ convergent vers π.

Exercice 15 : Moyenne de Cesàro.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}, l \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \quad , w_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i}$

1. Montrer que $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim v_n = l$.
2. A l'aide d'une contre exemple montrer que la réciproque est fausse
3. Montrer en revanche que : $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim v_n = +\infty$.
4. Montrer que $\lim u_n = l \Longrightarrow \lim w_n = l$

Fin