Fonctions Usuelles

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi mathématicien. Orphelin de mère à 6 ans, il fût élevé par son père. Il posa avec Isaac Newton les bases du calcul intégral et différentiel. Son oeuvre principale est la *monadologie*, où il présenta en 1714 les principes de base de ses pensées.

Blaque du jour

Il existe des questions auxquelles ni la Science, ni la Philosophie n'ont encore le courage de tenter de répondre. Vous, peut-être ?...

2 Si un chat retombe toujours sur ses pattes, et une tartine beurrée retombe toujours du côté du beurre, que se passe-t-il quand on attache une tartine beurrée sur le dos d'un chat et qu'on les jette par la fenêtre ?

2 De quelle couleur est un caméléon quand il se regarde dans la glace ?

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
2. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.
3. $2\arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.
4. $\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\cos(x)) = 1$.
5. $\arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin(x)$.
6. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.
7. $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \arccos(x) + \arccos(2x)$

Exercice 2

Soient a, b sont deux nombres réels. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$.
2. $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(y) = b \end{cases}$

Exercice 3

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)) = x + y$$

On pourra commencer par traiter le cas $x, y \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4

Etudier les variations des fonctions definies par :

1. $f : x \longrightarrow \arccos\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$.
2. $f : x \longrightarrow \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$.

Exercice 5

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + p\pi$$

où p est un entier à déterminer en discutant sur les signes .

Exercice 6

On considère la fonction : $f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

1. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. La courbe coupe l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses en un point A, calculer l'abscisse de A.

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes : $\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$, $\frac{1+\operatorname{th}^2(x)}{1-\operatorname{th}^2(x)}$.

Exercice 8

Soit la fonction $y = \sin(n \arcsin x)$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} :\quad (1-x^2)y" - xy' + n^2 y = 0$

Exercice 9

Soit $x \in]0, 1]$. On pose $y = \arccos(x)$.

1. Exprimer en fonction de x, $\cos(y)$, $\sin(y)$ et $\tan(y)$.
2. En déduire que $\arccos(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
3. Si $x = 0$, quelle est la valeur de $\arccos(x)$?.

Exercice 10

On considère la fonction :

$f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f. Calculer f' .
2. En déduire une expression simple de f sur des intervalles à choisir.
3. Dessiner la représentation graphique de f.

Exercice 11

.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \cos(a)\cos(b) \neq 0$.
   Montrer que : $\tan(a) + \tan(b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   1. $\tan(x) = \tan(2x)$.
   2. $\tan(x) = -\tan(2x)$.
   3. $\tan(2x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 12

Montrer que :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\forall\, x \in]0, 1],\ 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 13 : Polynômes de Chebychev.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [-1, 1]$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$$g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Exercice 14 : Olympiades

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, résoudre l'équation : $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$ pour $n \geq 3$.
2. On sait que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, pour tout réel x.
   Pour quelles valeur de x, a-t-on :
   1. $\cos(3x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$.
   2. $\cos(4x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$.
3. Trouver les réels x tel que $a = \tan\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right)$, $b = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $c = \tan\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$ forment une progression géométrique dans cet ordre.
   Indication : On pourra remarquer que $ac = b^2$.
4. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \tan(x_1) + 3\text{cotan}(x_2) &= 2\tan(x_2) \\ \tan(x_2) + 3\text{cotan}(x_3) &= 2\tan(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \tan(x_n) + 3\text{cotan}(x_n) &= 2\tan(x_1) \end{cases}$$