DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET APPLICATIONS

Développements limités

Exercice 1 : En utilisant les développements limités usuels, déterminez les développements limités suivants

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln \dfrac{1+x}{1-x}$
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln \dfrac{\sin x}{x}$
3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$
4. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(2+\sin x)$
5. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \text{Arctan}\,(\sqrt{3}\cos x)$
6. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x\,\ln(1+x)}{\cos x}$
7. $DL_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$
8. $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

Exercice 2 : Déterminez les développements limités suivants :

1. $DL_3(\infty)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(1/x)} - \cos(1/x)$;
2. $DL_2(\infty)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.
3. $DL_2(\infty)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$.
4. $DL_4(\infty)$ de $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln x$.

Exercice 3 : Déterminez les développements limités suivants :

1. $DL_3(\pi/4)$ de $x \mapsto \sin x$.
2. $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.
3. $DL_3(\pi/4)$ de $x \mapsto (\tan x)^{\cos 2x}$.
4. $DL_2(\pi/6)$ de $x \mapsto \text{Arcsin}\,(\sqrt{3}\sin x)$
5. $DL_3(2)$ de $x \mapsto x^x$.
6. $DL_3(\pi/6)$ de $x \mapsto \ln(2\sin x)$.
7. $DL_3(1)$ de $x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\ln(x)}}$.
8. $DL_2(\pi/4)$ de $x \mapsto (\tan x)^{\tan(2x)}$.

Exercice 4 : Déterminez le développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

Exercice 5 : Déterminez les développements limités à l'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$ de la fonction $\text{Arcsin}\,x$. Déduisez-en les valeurs des dérivées successives : $\text{Arcsin}^{(n)}(0)$.

Exercice 6 : Développement limité d'une application réciproque
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$la fonction définie par $f(x) = x\text{ch}\,(x)$.

1. Justifiez que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même. On note $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sa bijection réciproque.
2. Montrez que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme
$$g(u) = a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o(u^5)$$
3. Déterminez ce développement en exploitant la relation $g \circ f = id_{\mathbf{R}}$.

Calculs de limites

Exercice 7 : Déterminez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - \tan x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\ln(e+x)\right]^{1/x}$.

Exercice 8 : Déterminez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^x}{\sin(x-2)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right]^x$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\left[e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right]$.

Exercice 9 : Calculez les limites suivantes

1. $u_n = \left[\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right]^n$.
2. $u_n = \left[e-(1+1/n)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

Calculs d'équivalents

Exercice 10 : Déterminez un équivalent simple au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x - e^{-x} + 2\sin(x) + \sin(2x) - 6x$.
2. $x \mapsto x^x - (\sin x)^x$
3. $x \mapsto (e+x)^e - e^{(e+x)}$.
4. $x \mapsto x(2+\cos x) - 3\sin x$
5. $x \mapsto \sin(\operatorname{Arctan} x) - \operatorname{Arctan}(\sin x)$.
6. $x \mapsto \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$

Exercice 11 : Déterminez un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

Exercice 12 : Déterminez un équivalent simple des suites suivantes :
1. $u_n = x(\sqrt[n]{2} - 1)$.
2. $u_n = \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.
3. $u_n = n\left[e - (1+1/n)^n\right]$
4. $u_n = n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}$.

Développements asymptotiques

Exercice 13 : Au voisinage de $+\infty$, déterminez un développement limité généralisé des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$, à la précision $\dfrac{1}{x^2}$
2. $x \mapsto (x+1)e^{1/x}$, à la précision $\dfrac{1}{x^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}e^{1/x}$, à la précision $\dfrac{1}{x}$

Exercice 14 :

1. Déterminez le $DL_{10}(0)$ de $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
2. Donnez le développement asymptotique à l'ordre 5 au voisinage de $+\infty$ de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
Indication : commencez par le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 15 : On considère l'équation

$$(x^2+1)\,\sin x = 1. \tag{1}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Montrez que (3) admet une racine notée a_n dans l'intervalle $[2n\pi; (2n+\frac{1}{2})\pi]$.
2. Déterminez un développement asymptotique de (a_n) à la précision $\dfrac{1}{n^4}$.

Études de fonctions

Exercice 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

1. Donnez un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. En déduire l'équation de la tangente T_0 à Γ_f en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
2. Montrez que $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire la nature de la branche infinie de Γ_f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 17 : Soit $f : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\left[\ln(2x+1) - \ln x\right]$.

1. Donnez un développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.
2. Déduisez-en que Γ_f admet une asymptote oblique en $+\infty$. Précisez les positions relatives de Γ_f et de son asymptote.

Exercice 18 : Soit $f :]-\pi/2; \pi/2[\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$. Etudiez la fonction f au voisinage de 0 :
1. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Γ_f admet-elle une tangente en 0 ?
3. Quelles sont les positions relatives de Γ_f et de sa tangente éventuelle ?

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 .— 1. $f(x) = 2\,x + \dfrac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$

2. $f(x) = -\dfrac{1}{6}\,x^2 - \dfrac{1}{180}\,x^4 + o(x^4)$

3. $f(x) = e + \dfrac{1}{2}\,e\,x + \dfrac{1}{48}\,e\,x^3 + o(x^3)$

4. $f(x) = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2 - \dfrac{1}{24}\,x^3 + o(x^3)$

5. $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\,x^2 - \dfrac{7\sqrt{3}}{192}\,x^4 + o(x^5)$

6. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\,x^3 + o(x^3)$

7. $f(x) = e - \dfrac{1}{2}\,e\,x + \dfrac{11}{24}\,e\,x^2 + o(x^2)$

8. $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,x - \dfrac{5\sqrt{2}}{128}\,x^2 + o(x^2)$

Exercice 2 .— 1. $f(x) = \dfrac{1}{2\,x} + \dfrac{3}{8\,x^2} - \dfrac{1}{48\,x^3} + o(\dfrac{1}{x^3})$

2. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{3\,x} - \dfrac{1}{9\,x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

3. $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{10}{81\,x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

4. $f(x) = \ln(2) + \dfrac{1}{4\,x^2} - \dfrac{3}{32\,x^4} + o(\dfrac{1}{x^5})$

Exercice 3 .— 1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x-\dfrac{\pi}{4}) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,(x-\frac{\pi}{4})^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{12}\,(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)$

2. $f(x) = x - 1 - \dfrac{5}{2}\,(x-1)^2 + \dfrac{13}{3}\,(x-1)^3 - \dfrac{77}{12}\,(x-1)^4 + o((x-1)^4)$

3. $f(x) = 1 - 4\,(x - \dfrac{\pi}{4})^2 + o((x - \dfrac{\pi}{4})^3)$

4. $f(x) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{4}) + \dfrac{3\sqrt{13}}{13}\,(x - \frac{\pi}{6}) - \dfrac{2\sqrt{13}\sqrt{3}}{169}\,(x - \dfrac{\pi}{6})^2 + o((x - \frac{\pi}{6})^2)$

5. $f(x) = 4 + (4 + 4\,\ln(2))\,(x-2) + (3 + 4\,\ln(2) + 2\,\ln(2)^2)\,(x-2)^2 + (\dfrac{3}{2} + 3\,\ln(2) + 2\,\ln(2)^2 + \dfrac{2}{3}\,\ln(2)^3)\,(x-2)^3 + o(x-2)^3$

6. $f(x) = \sqrt{3}\,(x - \dfrac{\pi}{6}) - 2\,(x - \dfrac{\pi}{6})^2 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,(x - \dfrac{\pi}{6})^3 + o((x - \dfrac{\pi}{6})^3)$

7. $f(x) = 1 - (x-1) + o((x-1)^3)$

8. $f(x) = e^{-1} + \dfrac{2}{3}\,e^{-1}\,(x - \dfrac{\pi}{4})^2 + o((x - \frac{\pi}{4})^2)$

Exercice 4 .—

$$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$$

Exercice 5 .—

$$\mathrm{Arctan}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Exercice 6 .— 1. use the bijection thm

2. $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} + o(x^5)$.

3. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{17x^5}{24} + o(x^5)$.

Exercice 7 .— 1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{-1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{e}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{1/e}$

Exercice 8 .— 1. $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = \dfrac{1}{\pi}$

2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -4\,\ln(2) + 4$

3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2\,e^2}{\pi}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = e$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = e$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Exercice 9 .— 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{(\frac{\pi\sqrt{3}}{24})}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 10 .— 1. $f(x) \sim 2\,x$

2. $f(x) \sim \frac{1}{6}\,x^3$

3. $f(x) \sim -\dfrac{1}{2}\,e^{(-1+e)}\,x^2$

4. $f(x) \sim \frac{1}{60}\,x^5$

5. $f(x) \sim \frac{1}{30}\,x^7$

6. $f(x) \sim \frac{1}{12}\,x^4$

Exercice 11 .—

$$f(x) \sim \frac{1}{2\,x}$$

Exercice 12 .— 1. $u_n \sim \ln(2)$

2. $u_n \sim e^2$

3. $u_n \sim (-1+e)\,n$

4. $u_n \sim 1$

Exercice 13 .— 1. $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8\,x} - \frac{5}{16\,x^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$

2. $f(x) = x + 2 + \frac{3}{2\,x} + \frac{2}{3\,x^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$

3. $f(x) = -x - 2 - \frac{5}{2\,x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$

Exercice 14 .— 1. $F(x) = -x + x^2 + \frac{1}{10}\,x^5 - \frac{1}{24}\,x^9 - \frac{1}{10}\,x^{10} + \mathrm{o}(x^{10})$

2. $G(x) = x - \frac{31}{10}\,x^5 + \mathrm{o}(x^5)$