Jeudi 25 Novembre 2016

# Nombres Réels

**Otto Ludwig Hölder (1859-1937)**

Mathématicien allemand. On le connaît notamment pour : l'inégalité de Hölder ; le théorème de Jordan-Hölder ; le théorème de Hölder ; la moyenne de Hölder ; la condition de Hölder. Ses travaux portaient beaucoup sur les séries de Fourier, la théorie des groupes, la théorie de Galois

## Blaque du jour

- Un inspecteur demande à un professeur : Qu'est-ce qu'un bon professeur ?
  - Un bon professeur c'est un prof qui est souvent absent.
  - L'inspecteur surpris lui demanda alors : "Pouvez-vous me donner 2 raisons qui vous motivent à devenir professeur ?", juillet et août, lui répondit.
- Un professeur de médecine à ses étudiants : Qu'est ce qui provoque le sommeil ? votre cours, monsieur ; lui répondent-ils.

## Exercice 1 : En vrac

1. Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
   1. $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$.
   2. $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$ on ait : $a < b+\varepsilon$.
   Montrer de deux faons différentes, par l'absurde et en utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure, que : $a \leq b$.

## Exercice 2 : Racines carrés

1. Pour $a \in [1,+\infty[$, simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
2. Résoudre l'équation $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 3 : Point fixe

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ croissante. On pose $A = \{x \in [a,b]$ tel que $f(x) \geqslant x\}$

1. Montrer que A est non vide major. On pose $c = \sup(A)$.
2. Montrer que $f(c) \geqslant c$ puis $f(c) \leqslant c$.
3. Conclure.

## Exercice 3 : Inégalités Célèbres

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ...., x_n, y_1, y_2, ....., y_n$ des nombres réels positifs.

1. **Cauchy-Schwarz :** Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

2. **Hölder-Minkowski :** En déduire que : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3. On se propose de montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$.

   L'initialisation étant évidente, supposons alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leqslant n+1$.

   i. Dire pourquoi $\exists i \in [|1, n+1|]$ tel que $x_i \leqslant 1$.
   On prend alors $i = n+1$, quitte à changer les indices..

   ii. On pose $y_i = \dfrac{n}{n+1-x_{n+1}} x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

   En déduire que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} x_i \leqslant x_{n+1} \left(\frac{n+1-x_{n+1}}{n}\right)^n$

   iii. Étudier sur $[0, 1]$, la fonction $f(t) = t\left(\dfrac{n+1-t}{n}\right)^n$.

   iv. Conclure.

4. **Inégalité arithmico-géométrique :** En déduire que $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

## Exercice 4 : Calcul de bornes sup et inf

Déterminer, quand elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $A = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2. $B = \left\{n^2 + \dfrac{1+(-1)^n}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3. $C = \left\{E(x) + E\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ tel que } x > 0\right\}$.

4. $D = \left\{\dfrac{p-q}{p+q+1} \text{ tel que } (p, q) \in \mathbb{N}^2; p \geq q\right\}$.

5. $E = \left\{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \text{ tel que } (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.

6. $F = \left\{1 - \dfrac{1}{n-m} \text{ tel que } (n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } n \neq m\right\}$.

## Exercice 5 : Lemme des Tiroirs et Principe des pigeonniers.

1. Énoncer et justifier le *lemme des tiroirs* .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de réels tous dans l'intervalle $[0,1]$. Montrer que : $\exists (i,j) \in [0,1]^2$ tel que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \dfrac{1}{n}$ .
3. Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\exists (p,q) \in \mathbb{N}\times [|1,n|]$ tel que $\left|x-\dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{q^2}$

   *Indication :* Prendre $x_i = ix - E(ix)$ avec $i \in [|0,n|]$.

## Exercice 6 : Partie entière en vrac.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.
2. $E(nx) = nE(x)+r$ tel que $0 \leqslant r \leq n-1$.
3. $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)$.

   **Indication :** Poser $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right)$,

   montrer que $f(x+1) = f(x)+1$ que $f(x) = E(x)$, $\forall x \in [0,1[$, puis conclure.
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

## Exercice 7 : Puissances

1. Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geq 1+na$.
3. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
   Montrer que $n(b-a)a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}$.
4. Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels positifs ou nuls. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ ou $c(1-a)$ est inférieur $\dfrac{1}{4}$.

   **Indication** : On pourra penser à étudier sur $[0,1]$, la fonction $f(t) = t(1-t)$.

## Exercice 8 : Système non linéaire.

1. Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.

   Montrer que $x_i = 1$ pour tout $i \in [|1,n|]$.
2. On suppose que $(x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^*)^4$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & t \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$

   établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.

## Exercice 9 : Manipulation des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq m}$ deux familles de réels.

1. Démontrer que : $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = n\sum_{i=1}^n a_ib_i - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_k-a_j)(b_k-b_j).$
2. En déduire que :
   - i. Si les deux suites sont croissantes, alors : $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$
   - ii. Si l'une des deux suites est croissante et l'autre décroissante, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \geqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

## Exercice 10 : Opérations sur les bornes sup et inf.

Soient $A, B$ deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornes.

1. On suppose $A \subset B$, montrer que : $\begin{array}{l}\sup(A) \leqslant \sup(B) \\ \inf(A) \geqslant \inf(B)\end{array}$ .
2. On suppose $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que : $\begin{array}{rcl}\sup(A\cup B) &=& \max\{\sup(A),\sup(B)\} \\ \sup(A\cap B) &\leqslant& \min\{\sup(A),\sup(B)\} \\ \inf(A\cup B) &=& \min\{\inf(A),\inf(B)\} \\ \inf(A\cap B) &\geqslant& \max\{\inf(A),\inf(B)\}\end{array}$
3. On note par *A+B* l'ensemble des réels de la forme *a+b* tels que $a \in A, b \in B$.

   Montrer que $\begin{array}{rcl}\sup(A+B) &=& \sup(A)+\sup(B) \\ \inf(A+B) &=& \inf(A)+\inf(B)\end{array}$
4. On note par *-A* l'ensemble des réels de la forme *-a* tels que $a \in A$.
   Montrer que : $\begin{array}{l}\sup(-A) = -\inf(A) \\ \inf(-A) = -\sup(A)\end{array}$ .
5. On note par *A-B* l'ensemble des réels de la forme *a-b* tels que $a \in A, b \in B$.

   Montrer que : $\begin{array}{l}\sup(A-B) = \sup(A)-\inf(B) \\ \inf(A-B) = \inf(A)-\sup(B)\end{array}$ .
6. On note par *AB* l'ensemble des réels de la forme *ab* tels que $a \in A, b \in B$.
   On suppose $A \subset \mathbb{R}^+, B \subset \mathbb{R}^+$, montrer que : $\begin{array}{rcl}\sup(AB) &=& \sup(A)\sup(B) \\ \inf(AB) &=& \inf(A)\inf(B)\end{array}$
7. Donner des relations identiques dans les cas suivants :
   - i. $A \subset \mathbb{R}^+, B \subset \mathbb{R}^-$
   - ii. $A \subset \mathbb{R}^-, B \subset \mathbb{R}^-$

## Exercice 11 : Quelque valeurs absolues

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.